Handbuch für Fernmeldehandwerker

Band 1

Grundlagen der Physik und der Mathematik

Handbuch für Fernmeldehandwerker

Band 1

(mit Beiheft)

Grundlagen der Physik und der Mathematik

1. Auflage (Stand: Frühjahr 1981)

Deutsche Postgewerkschaft - Hauptvorstand - Verlag - Rhonestraße 2 - 6000 Frankfurt 71

Inhaltsverzeichnis

Physik

Mathematik

Seite

Seite

Physik

1 Grundbegriffe der Physik

1.1 Physikalische und chemische Vorgänge

Physikalische Formel:
$Q = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$

Zustandsänderung: Erwärmung

Chemische Formel: $2\,H + O = H_2O$

Stoffänderung: Aus Wasserstoff und Sauerstoff entsteht ein neuer Stoff: Wasser.

Die Physik ist eine Naturwissenschaft, die sich mit **Zustandsänderungen** in der Natur beschäftigt. Die Abgrenzung zur Chemie besteht darin, daß die Chemie **Stoffänderungen** in der Natur untersucht.

Beispiele für physikalische Vorgänge:
- Freier Fall eines Körpers
- Ausdehnung eines Körpers bei Erwärmung
- Schmelzen und Verdampfen

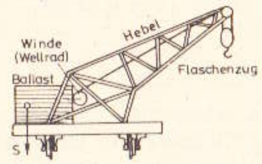
Der Stoff bleibt bei einem physikalischen Vorgang chemisch unverändert.

Eisen bleibt auch nach dem freien Fall Eisen.

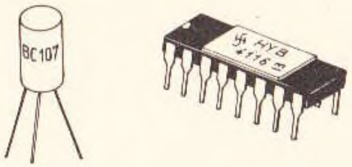
Beispiele für chemische Vorgänge:
- Verbrennen von Stoffen
- Zersetzen von Metallen durch Säuren
- Gewinnung von Metallen aus Erzen durch Sauerstoffentzug (Reduktion).

Bei einem chemischen Vorgang entstehen ein oder mehrere neue Stoffe mit neuen, gegenüber den Ausgangsstoffen veränderten Eigenschaften.

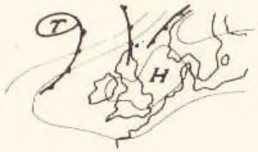
Zwischen der Physik und der Technik besteht eine sehr enge Beziehung. Beispiele sind auf vielen Gebieten zu finden:



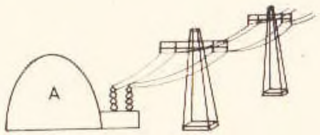
a) Betrachtet man einen Kran näher, so wird man feststellen, daß er aufgrund vieler physikalischer Gesetze konstruiert ist:
   Hebelgesetz, Gesetze für den Schwerpunkt und Standfestigkeit, Flaschenzug usw.



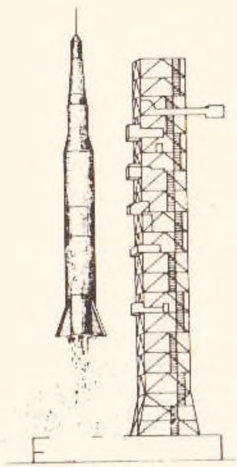
b) Beobachtung und Beschreibung von Vorgängen in Halbleitermaterialien führten über die Entwicklung von Transistoren zu den modernsten elektronischen Bauteilen – den integrierten Schaltkreisen.



c) Aufgrund vieler Beobachtungen ist man imstande, Naturvorgänge vorherzusagen. Darunter fallen Wettervorhersagen, Schlagwettervorhersagen in Bergwerken usw.



d) Eine enge Beziehung zur Chemie findet man in Kernkraftwerken, wo komplizierte Stoffänderungen (radioaktiver Zerfall) in Zustandsänderungen umgewandelt werden (Erwärmung von Wasser).



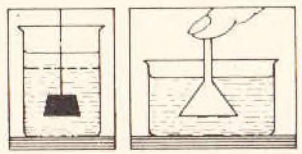
Physik und Technik heute: Start einer Mondrakete

Wegen ihrer Vielfalt wurde die Physik in mehrere Sachgebiete unterteilt:

- **Mechanik**
- **Optik**
- **Wärmelehre**
- **Elektrik**
- **Akustik**
- **Atomphysik**

Um physikalische Vorgänge, d. h. Naturvorgänge, genauer beobachten zu können, werden Experimente durchgeführt, die stets gewissenhaft vorbereitet werden müssen.

Um wichtige Erkenntnisse zu erhalten und Gesetzmäßigkeiten zu finden, bedient man sich in der Physik der Arbeitsweisen Beobachtung, Experiment, Messung und Auswertung.



Wo ein Körper ist, kann kein zweiter sein. Wo Luft oder ein fester Körper ist, kann kein Wasser sein.

In allen Teilgebieten beschäftigt man sich mit Körpern, die sowohl gasförmig, flüssig als auch fest sein können. Es ist möglich, Stoffe, wie z. B. Wasser, durch Verändern der Temperatur oder des Druckes in diese drei Aggregatzustände umzuwandeln.

Wichtig ist auch die Tatsache, daß jeder Körper, sei er gasförmig, flüssig oder fest, einen Raum einnimmt.

Stoffe können die drei Aggregatzustände fest, flüssig oder gasförmig annehmen. Wo ein Körper ist, kann kein zweiter sein.

1.2 Das „Internationale Einheitensystem" (SI)

Physikalische Größen:

Zahlenwert	**Einheit**
3	m (Meter)
1	kg (Kilogramm)
10	s (Sekunde)
0,2	A (Ampere)

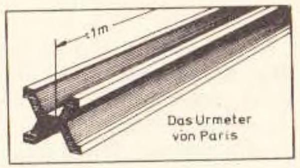
Eine physikalische Größe, der ein bestimmter Formelbuchstabe (DIN 1304) zugeordnet ist, besteht immer aus Zahlenwert und Einheit. Als Einheiten werden Basis- oder abgeleitete Einheiten des Internationalen Einheitensystems (Système International d'Unités = SI) **verwendet.** In der nachstehenden Tabelle sind die Grund- oder Basisgrößen des SI-Systems aufgeführt – das sind die Größen, von denen alle anderen abgeleitet werden.

Basisgrößen	**Formelzeichen**	**SI-Basiseinheit**	**Kurzzeichen**
Länge, Weg	ℓ, s	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Temperatur	T, ϑ	Kelvin	K
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A

In der Physik werden gesetzlich festgelegte Einheiten verwendet.

Innerhalb der BRD sind die SI-Einheiten mit dem „Gesetz über Einheiten im Meßwesen", das am 05. 07. 70 in Kraft getreten ist, gesetzliche Einheiten geworden. Das Gesetz läßt aber auch zu, daß bestimmte „überlieferte Einheiten" weiterverwendet werden. Darunter fällt z. B. die Temperaturangabe in °C (Grad Celsius). Werden Temperaturdifferenzen in °C oder in K angegeben, so sind die Zahlenwerte identisch.

1.2.1 Länge



Basiseinheit für die Länge ist das Meter. 1 Meter entspricht ungefähr dem 40 000 000sten Teil des Erdmeridians. Das sog. Urmeter, das die Länge eines Meters festhält, liegt in Paris. Mit der Einführung der SI-Einheiten wurde die Länge eines Meters neu definiert:

1 Meter (m) ist das 1 650 763,73-fache der Wellenlänge des leuchtenden Kryptons.

Beispiele:

$5\ km = 5 \cdot 10^3\ m = 5 \cdot 10^5\ cm$

$0{,}023\ cm = 0{,}023 \cdot 10^{-2}\ m$

$3\,120\ mm = 3\,120 \cdot 10^{-6}\ km = 3{,}12 \cdot 10^{-3}\ km$

$536\ m = 536 \cdot 10^3\ mm = 536\,000\ mm$

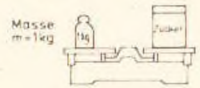
$120\ mm = 120 \cdot 10^{-3}\ m$

Neben den Grundeinheiten werden auch dezimale Vielfache und Teile dieser Einheiten verwendet. Die nachstehende Tabelle soll das Umrechnen innerhalb der Längeneinheiten erleichtern. Dabei wird von links nach oben von der größeren auf die kleinere und von rechts nach oben von der kleineren auf die größere Einheit geschlossen:

	mm	cm	dm	m	km	
mm	—	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	mm
cm	10^1	—	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	cm
dm	10^2	10^1	—	10^{-1}	10^{-4}	dm
m	10^3	10^2	10^1	—	10^{-3}	m
km	10^6	10^5	10^4	10^3	—	km

1.2.2 Masse

Die Masse wird mit einer Balkenwaage gemessen!



Die Masse (Formelzeichen m) eines Körpers sagt etwas über dessen Substanzmenge aus. Da sich die Masse (Substanz) eines Körpers niemals verändert, ist sie an jedem Punkt des Weltalls gleich. Eine 100-g-Tafel Schokolade hat auf dem Mond oder auf dem Mars dieselbe Masse $m = 100$ g wie auf der Erde.

Die Masse eines Körpers ist unabhängig vom Ort.

Weitere Einheiten:

mg: Milligramm
g: Gramm

Zur Messung der Masse wird von der Einheit kg (Kilogramm) ausgegangen.

	mg	g	kg	
mg	—	10^{-3}	10^{-6}	mg
g	10^3	—	10^{-3}	g
kg	10^6	10^3	—	kg

Die nebenstehende Tabelle zeigt die Umrechnungsbeziehungen von einer Einheit in die andere.

Beispiele:

a) $23\ g = ?\ kg$ — $23\ g = 23 \cdot 10^{-3}\ kg = 0{,}023\ kg$

b) $0{,}012\ Mg = ?\ g$ — $0{,}012\ Mg = 0{,}012 \cdot 10^6\ g = 12\,000\ g$

c) $5{,}6\ mg = ?\ g$ — $5{,}6\ mg = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\ g = 0{,}0056\ g$

1.2.3 Zeit

Umrechnungen:

$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$

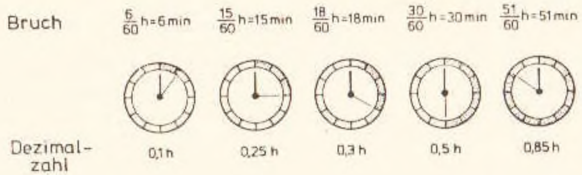
$1\ min = 60\ s$

Die Zeit (Formelzeichen t) wird in der Technik meistens in Sekunden (s) angegeben. Oft findet man aber auch Stunden- (h) und Minutenangaben (min).

Dekadische Unterteilung einer h:

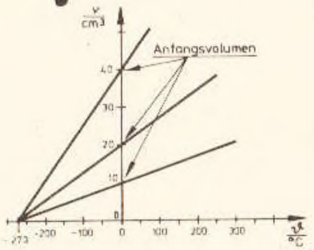
$$\frac{6}{60}\ h = \frac{1}{10}\ h = 0{,}1\ h = 6\ min$$

Es ist oftmals üblich, eine Stunde nicht in 60 Teile, sondern dekadisch zu unterteilen.



Soll von einer Minutenangabe in eine dezimale Stundenangabe umgerechnet werden, so sind die Minuten durch 60 zu dividieren.

1.2.4 Temperatur



Im täglichen Leben werden Temperaturen in °C (Grad Celsius) angegeben. Diese Temperaturskala ist dadurch entstanden, daß der Physiker Celsius die zwei Fixpunkte des Wassers (Eispunkt und Siedepunkt) als 0 °C und 100 °C definiert hat. Die Celsius-Skala entstand durch gleichmäßige Unterteilung der Temperaturen zwischen 0 und 100 °C.

Werden Gase auf ihren Zusammenhang zwischen Temperatur und Volumen untersucht, so ergibt sich, daß sie sich bei Erwärmung ausdehnen und bei Abkühlung zusammenziehen. Durch Versuche wurde festgestellt, daß sich das Volumen der Gase pro °C Temperaturänderung um $^1/_{273}$ verändert. Wird diese Gesetzmäßigkeit grafisch aufgetragen, dann erkennt man, daß bei −273 °C das Volumen der Gase zu Null wird.

Temperatur	
Formelzeichen	Einheit
T ϑ	K (Kelvin) °C

Aufgrund der gesetzlichen Bestimmungen können beide Maßeinheiten verwendet werden!

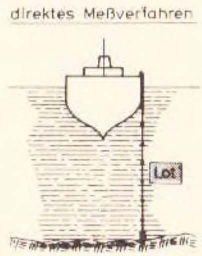
Dieser Zusammenhang wurde vom Physiker Kelvin aufgegriffen; es entstand die sog. Kelvin-Skala, deren Nullpunkt bei −273 °C liegt. Es entsprechen also:

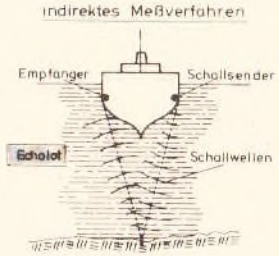
0 K (Kelvin)	=	−273 °C
273 K	=	0 °C
293 K	=	20 °C

Temperaturunterschied	=	Höhere Temperatur	−	Niedrigere Temperatur
ΔT	=	T_1	−	T_2
$\Delta\vartheta$	=	ϑ_1	−	ϑ_2
$\Delta\vartheta$	=	ΔT		

Für die Physik ist oftmals der sog. Temperaturunterschied von Wichtigkeit. Da ein Grad Celsius einem Grad Kelvin entspricht, ist es völlig belanglos, ob der Temperaturunterschied in K oder in °C angegeben wird. Innerhalb dieses Buches wird auch weiterhin mit °C gerechnet.

1.2.5 Messen





Messen heißt, den bestimmten Wert einer physikalischen Größe als Vielfaches oder Teil einer Einheit ermitteln. Bei der Längenmessung wird der zu messende Gegenstand entweder mit dem bekannten Maß unmittelbar verglichen (direktes Meßverfahren) oder auf andere physikalische Größen zurückgeführt (indirektes Meßverfahren).

Um die Tiefe eines Gewässers zu messen, kann man sich einer Lotleine bedienen, die in Längeneinheiten geeicht ist. Bei der Anwendung des Echolots wird aus der Zeit, die ein vom Grund des Gewässers reflektierter Schallimpuls benötigt, die Tiefe bestimmt.

Zur Lernerfolgssicherung

- Erklären Sie anhand von Beispielen den Unterschied zwischen einem physikalischen und einem chemischen Vorgang!
- Durch welche Arbeitsweisen werden physikalische Erkenntnisse und Gesetzmäßigkeiten ermittelt?
- Nach welchem Einheitensystem werden physikalische Größen gemessen?
- Welches sind die sechs Basiseinheiten des heute gebräuchlichen Einheitensystems?
- Nennen Sie beispielhaft Vielfache und Teile der gesetzlichen Einheiten!
- Was heißt Messen?
- Beschreiben Sie anhand eines Beispiels den Unterschied zwischen direktem und indirektem Meßverfahren!
- Wie ergeben sich Einheiten für Größen, die nicht in einer der sechs Basiseinheiten angegeben werden können?

2 Mechanik

2.1 Statik

2.1.1 Dichte

Für einen Körper wurde ermittelt:

Volumen: $V = 2{,}59\ \text{dm}^3$

Masse: $m = 23{,}051\ \text{kg}$

Dichte: $\varrho = \dfrac{23{,}051\ \text{kg}}{2{,}59\ \text{dm}^3}$

$\varrho = 8{,}9\ \dfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Der Körper besteht aus Kupfer.

Nachdem die Masse m eines Körpers mit einem bestimmten Volumen V ermittelt wurde, soll berechnet werden, wie groß seine Masse pro dm^3 ist. Hierzu bildet man den Quotienten aus der Masse m und dem Volumen V. Dieser Quotient wird mit dem griechischen Buchstaben ϱ (Rho) gekennzeichnet und Dichte genannt.

Dichte in g/cm^3			
Gold	19,3	Glas	2,5
Blei	11,3	Beton	um 2
Kupfer	8,9	Holz	0,5 bis 0,9
Messing	um 8,5	Kork	0,2
Eisen	7,2 bis 7,9	Styropor	0,03 bis 0,04
Aluminium	2,7		
Quecksilber	13,6	Wasser (rein)	1
konz. Kochsalzlösung	1,2	Spiritus (Weingeist)	0,8
Meerwasser	1,03	Benzin	0,65 bis 0,7

Die nebenstehende Tabelle gibt Auskunft über die Dichte verschiedener Stoffe. Neben der Einheit kg/dm^3 ist auch z. B. g/cm^3 oder mg/mm^3 möglich.

$$\frac{1\ \text{kg}}{1\ \text{dm}^3} = \frac{1000\ \text{g}}{1000\ \text{cm}^3} = \frac{1\ \text{g}}{1\ \text{cm}^3}$$

Die Dichte ϱ gibt an, wie groß die Masse eines Stoffes bezogen auf eine Volumeneinheit ist $\left(\text{z. B. } \dfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \text{ oder } \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3} \text{ oder } \dfrac{\text{mg}}{\text{mm}^3}\right)$.

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

Beispiele:

a) Das Volumen eines Eisenkörpers $\left(\varrho = 7{,}85\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ beträgt $1270\ \text{cm}^3$. Wie groß ist seine Masse?

$m = V \cdot \varrho$

$m = 1270\ \text{cm}^3 \cdot 7{,}85\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$m = 9969{,}5\ \text{g} = 9{,}9695\ \text{kg}$

b) Ein Würfel hat die Kantenlänge $a = 11{,}5\ \text{mm}$. Wie groß ist seine Masse m, wenn er aus Gold gegossen wurde?

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

$m = V \cdot \varrho = a^3 \cdot \varrho$

$m = 1{,}15^3\ \text{cm}^3 \cdot 19{,}3\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$m = 29{,}353\ \text{g}$

c) 150 m Draht mit einem Durchmesser von 4 mm wurden zu einem Ring gewickelt. Seine Masse beträgt 16 kg. Aus welchem Material besteht der Draht?

$m = 16$ kg
$d = 4$ mm
$\ell = 150$ m
$\varrho = ?$

Um den Quotienten aus Masse und Volumen ermitteln zu können, wird zunächst das Volumen bestimmt. Es ist darauf zu achten, daß für Länge und Durchmesser dieselbe Einheit (dm) verwendet wird.

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

$$V = \ell \cdot A = \ell \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$V = \frac{1500\ \text{dm} \cdot 0{,}04^2\ \text{dm}^2 \cdot 3{,}14}{4}$$

$$V = \frac{7{,}536\ \text{dm}^3}{4} = 1{,}884\ \text{dm}^3$$

Schließlich wird die Dichte bestimmt, und es kann die Aussage gemacht werden, daß der Draht vermutlich aus Messing besteht.

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{16\ \text{kg}}{1{,}884\ \text{dm}^3} = 8{,}493\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

d) Bei Gasen wird die Dichte immer in g/dm³ angegeben, um eine einigermaßen überschaubare Zahl zu erhalten. Luft hat eine Dichte von 1,3 g/dm³. Welche Masse hat die Luft in einem Zimmer mit den folgenden Maßen:
$h = 3$ m; $\ell = 10$ m; $b = 8$ m

Dichte der Luft:
$\varrho = 1{,}3\ \text{g/dm}^3 = 1{,}3\ \text{kg/m}^3$

Zunächst wird das Volumen bestimmt.

$V = b \cdot \ell \cdot h$
$V = 8\ \text{m} \cdot 10\ \text{m} \cdot 3\ \text{m}$
$V = 240\ \text{m}^3$

Schließlich wird die Masse bestimmt.

$m = V \cdot \varrho$

$$m = 240\ \text{m}^3 \cdot 1{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$m = 312$ kg

Aus dem Ergebnis (312 kg) wird ersichtlich, daß das Gewicht der Luft nicht unerheblich ist.

2.1.2 Kraft – Gewichtskraft

Beschleunigung:
Geschwindigkeitsänderung pro Sekunde

Körper werden beschleunigt, wenn eine Kraft auf sie wirkt. Das geschieht z. B. beim Werfen eines Balls oder beim Stoßen einer Stahlkugel. Diese beiden Beispiele machen bewußt, daß die Masse (Trägheit) der Beschleunigung entgegenwirkt. So kann bei gleichem Kraftaufwand der Ball (kleine Masse) weiter geworfen werden (größere Beschleunigung) als die Stahlkugel (große Masse) gestoßen werden kann.

Ein Auto ändert innerhalb von 5 s seine Geschwindigkeit von 10 m/s auf 35 m/s.

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeit}}$$

$$a = \frac{v}{s}$$

$$a = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\ \text{s}}$$

$$a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Seine Geschwindigkeit nimmt innerhalb einer Sekunde um 5 m/s zu!

Ganz deutlich merkt man die Wirkung der Beschleunigung im Fahrstuhl. Beim Anfahren des Fahrstuhls – er wird beschleunigt – geht man in die Knie; es muß mehr Kraft zum Stehen aufgewendet werden. Hat der Fahrstuhl dagegen seine Fahrgeschwindigkeit erreicht, dann ist kein Mehraufwand an Kraft nötig.

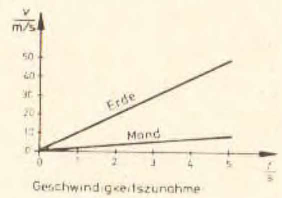
> Wirkt auf einen Körper mit der Masse 1 kg die Kraft 1 N, so wird er mit 1 m/s² beschleunigt, d. h., seine Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 1 m/s zu.
>
> $$F = 1\ \text{kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \text{N}$$

Deshalb gilt für die Kraft:

Kraft = Masse mal Beschleunigung
$F = m \cdot a$

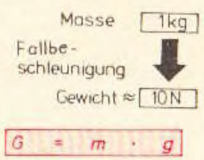
Andere Einheiten:
cN (1 cN = 0,01 N)
kN (1 kN = 1000 N)
MN (1 MN = 10^6 N)

Die Einheit der Kraft ist N (Newton)!



Geschwindigkeitszunahme (Beschleunigung) auf der Erde und auf dem Mond.

Läßt man einen Körper frei fallen, so wird er durch die Erdanziehungskraft beschleunigt. Die Geschwindigkeitszunahme eines Körpers auf der Erde beträgt 9,81 m/s², auf dem Mond dagegen nur 1,57 m/s².



Aufgrund dieser Tatsache ist das Gewicht eines Gegenstandes ebenfalls eine Kraft. Da die Anziehungskraft (Fallbeschleunigung $g = 9{,}81$ m/s²) auf jeden Körper mit der Masse m wirkt, wird das Gewicht auch als Gewichtskraft bezeichnet.

Ein Körper mit der Masse m = 1 kg wiegt	
am Äquator	9,7635 N
am Pol	9,8321 N
auf dem Mond	1,57 N
auf dem Mars	3,63 N
auf dem Jupiter	24,61 N
auf der Sonne	275 N

1 kp = 9,81 N

Beispiele:

a) Wieviel wiegt ein Wägestück von 60 kg auf der Erde, dem Mond und der Sonne?

b) Eine Mondrakete beschleunigt mit ca. 8 g. Wie groß ist das Gewicht eines Astronauten mit m = 75 kg?

Die Kraft, mit der die Erde einen Körper mit der Masse m = 1 kg anzieht, beträgt 9,81 N oder ungefähr 10 N. Da der Wert von 10 N nur eine Abweichung von ca. 2 % hat, und die Erdanziehung schwankt, soll im Rahmen dieses Buches nur mit diesem Näherungswert gerechnet werden.

Häufig findet man noch in der Technik und in der Literatur als Einheit für die Kraft das kp. Diese Einheit ist jedoch nach DIN 1301 seit dem 01. 01. 1978 nicht mehr zugelassen.

Erde: $G = 60 \cdot 9{,}81$ N = 588,6 N
oder annähernd: = 600 N
Mond: $G = 60 \cdot 1{,}57$ N = 94,2 N
Sonne: $G = 60 \cdot 275$ N = 16 500 N

$$G = m \cdot a = m \cdot 8\,g$$
$$G = 75 \cdot 8 \cdot 10 \text{ N}$$
$$G = 6000 \text{ N}$$

Durch Muskelkraft wird ein Behälter gehoben und getragen.

Die Gewichtskraft eines Körpers kann durch unsere Muskelkraft überwunden werden. Wir können ihn heben. Kräfte dienen aber nicht nur zur Überwindung der Gewichtskraft, sondern auch zu Bewegungsänderungen, wie das Werfen eines Balles oder das Drehen eines Rades.

Ferner kann durch die Einwirkung einer Kraft ein Gegenstand verformt werden. Dabei wird zwischen der **plastischen** und **elastischen** Verformung unterschieden:

Nimmt ein Gegenstand nach seiner Verformung nicht mehr die ursprüngliche Form an, so spricht man von einer plastischen Verformung. Beispiele: Schmieden eines Werkstückes; Verformen von Knetgummi.

Vor der Belastung | Belastung | Nach der Belastung

Plastizität

Vor der Belastung | Belastung | Nach der Belastung

Elastizität

Geht dagegen ein Gegenstand nach seiner Verformung in seine ursprüngliche Lage zurück, dann handelt es sich stets um eine elastische Verformung. Beispiele: Autofeder, Tischtennisball.

Praktisch geht nach immer größer werdender Krafteinwirkung jeder Gegenstand von der elastischen in die plastische Verformung über (immer stärkeres Dehnen einer Feder).

Ein Elektromagnet zieht Schrott an – **Magnetische Kraft**

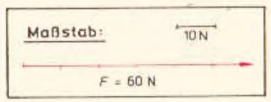
Außer durch Muskelkraft kann ein Gegenstand z. B. durch magnetische Kraft oder durch Massenanziehung (Gravitation) verformt oder bewegt werden.

Die Ursache der Verformung oder Bewegungsänderung eines Gegenstands ist immer eine Kraft.

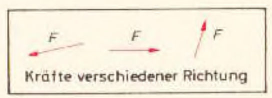
2.1.2.1 Darstellung von Kräften

vektorielle Größe = Kraft $\vec{F}$

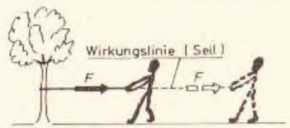
Kräfte werden durch sog. Kraftpfeile oder Vektoren dargestellt. Dabei muß folgendes beachtet werden:



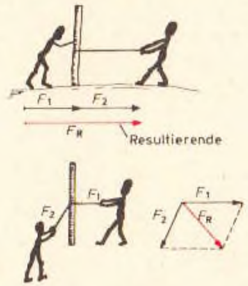
1. Die Länge des Vektors muß entsprechend der Kraft maßstäblich gezeichnet werden.



2. Die Richtungen von Vektor und Kraft müssen übereinstimmen.



3. Vektoren können entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.



Beispiele:

a) Besitzen mehrere Kräfte eine gemeinsame Wirkungslinie, so ist die Resultierende die Summe aller Einzelkräfte. Dabei wird einer Kraftrichtung ein positives und der entgegengesetzt gerichteten ein negatives Vorzeichen zugeordnet.

b) Greifen zwei Kräfte an einem gemeinsamen Punkt an, z. B. wenn zwei Personen eine Last tragen, dann wird ein Kräfteparallelogramm konstruiert, dessen Diagonale die Resultierende darstellt.

$F_1 = 200$ N

$F_2 = 150$ N

$F_R = G = ?$

c) Beim Bau eines Fertighauses wird ein Träger mit der Masse $m = 500$ kg mit einem Drahtseil an einen Kranhaken gehängt und transportiert. Welcher Belastung müssen die einzelnen Seilstücke standhalten?

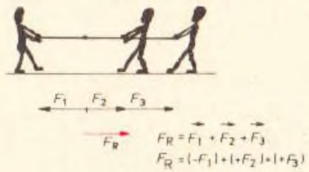
Zunächst sind die bekannten Kräfte (Resultierende) und Maße (Winkel von 90°) zu zeichnen. Der Maßstab beträgt: 2000 N = 2 cm.

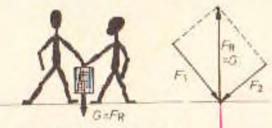
Da der Winkel bekannt ist und beide Kräfte gleich groß sind, ist das Kräfteparallelogramm zu konstruieren. Schließlich wird die Größe der einzelnen Teilkräfte abgelesen. Sie betragen jeweils 3530 N.

d) Greifen mehr als zwei Teilkräfte F in einem gemeinsamen Punkt an, so sind zunächst Teilresultierende zu bilden, die schließlich zu einer Gesamtresultierenden zusammengefaßt werden.

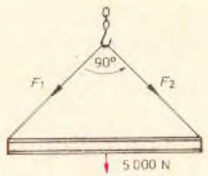
4. Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so werden diese zu einer Gesamtkraft, auch Resultierende genannt, zusammengefaßt.

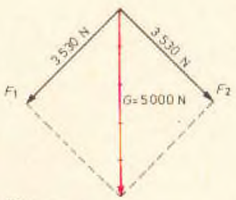
5. Kräfte werden geometrisch, also unter Berücksichtigung ihrer Größe und Lage, addiert.

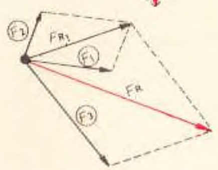




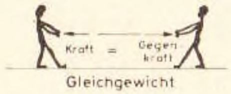
Maßstab: 100 N ≙ 2 cm
Resultierende (gemessen):
$F_R = 250$ N







2.1.2.2 Gleichgewichtsbedingungen



Keine Gegenkraft; → Körper wird beschleunigt: $F = m \cdot a$

Isaak Newton fand das Gesetz

Aktio = Reaktio

bzw. **Kraft = Gegenkraft.**

Dieses sehr wichtige Gesetz beinhaltet folgende Aussage:

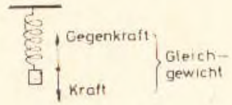
Befindet sich ein Körper in Ruhe, man sagt auch im Gleichgewicht – er wird also weder bewegt noch verformt –, dann ist die Resultierende immer gleich 0.

Jede auf einen Körper wirkende Kraft (Aktionskraft) ruft eine Gegenkraft hervor (Reaktionskraft). Befindet sich der Körper in Ruhe, also im Gleichgewicht, so sind Kraft und Gegenkraft gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.

Beispiele:

a) Durch die Verformung einer Schraubenfeder ist der Gleichgewichtszustand erreicht.

b) Sind Kraft und Gegenkraft gleich groß, so ist die Resultierende gleich 0. Findet jedoch eine Kraft keine Gegenkraft, so wird der Körper beschleunigt. (Beachte: es müssen Reibungskräfte überwunden werden.)



2.1.2.3 Druck

Wirkt auf einen **starren Körper** eine Kraft, so wird sie geradlinig in ihrer Wirkungsrichtung durch den Körper übertragen. Wie sich die Kraft auf einen anliegenden Körper auswirkt, hängt außer von der Größe der Kraft von der Größe der Berührungsfläche ab.

Die „Auswirkung" wird Druck genannt.

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{gedrückte Fläche}}$$

$$p = \frac{F}{A}$$

Je kleiner bei gleicher Kraft die gedrückte Fläche ist, desto größer ist der Druck.

Diese Tatsache wird z. B. bei allen Schneidwerkzeugen (Messern, Scheren usw.) ausgenutzt.

Der Druck wird in Pascal (Pa) gemessen.

Es gilt:

$$1\ \text{Pa} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\,.$$

Daneben wird in der Technik die Einheit bar angewendet:

$$1\ \text{bar} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}\,.$$

Beispiel:

a) Wie groß ist der durch einen zylindrischen Dorn ausgeübte Druck auf die Unterlage, wenn in Achsrichtung eine Kraft von 10 N wirkt und der Dorn einen Durchmesser von 10 mm hat?

b) Welchen Wert nimmt der Druck an, wenn der Dorn am unteren Ende auf 2 mm Durchmesser verjüngt wird?

a) $p_1 = \dfrac{F}{A_1}$

$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{(10\ \text{mm})^2 \cdot \pi}{4} \approx 78{,}5\ \text{mm}^2$$

$$A_1 = 0{,}785\ \text{cm}^2 = 0{,}785 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$p_1 = \frac{10\ \text{N}}{0{,}785 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} \approx 127389\ \text{Pa}$$

oder

$$p_1 = \frac{10\ \text{N}}{0{,}785\ \text{cm}^2} \approx 12{,}7389\ \text{bar}$$

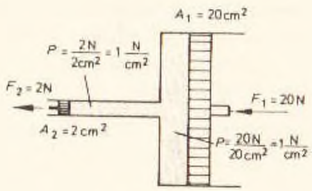
b) $p_2 = \dfrac{F}{A_2}$

$$A_2 = \frac{(2\ \text{mm})^2 \cdot \pi}{4} \approx 3{,}14\ \text{mm}^2$$

$$A_2 = 0{,}0314\ \text{cm}^2$$

$$p_2 = \frac{10\ \text{N}}{0{,}0314\ \text{cm}^2} \approx 318{,}5\ \text{bar}$$

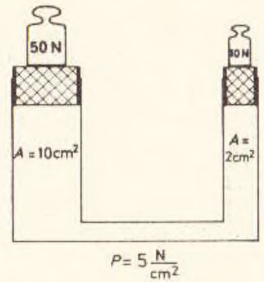
Der Druck ist rund 25mal so hoch wie im Beispiel a).



Ein von außen auf eine **Flüssigkeit** ausgeübter Druck pflanzt sich aufgrund der Verschiebbarkeit der Moleküle und der Inkompressibilität (Nichtzusammendrückbarkeit) der Flüssigkeit nach allen Seiten in gleicher Größe fort.

Die Eigenschaft, daß sich der Druck in einer Flüssigkeit fortpflanzt, macht man sich bei sog. Hydraulikgeräten zunutze. Wegen der besseren Korrosionsbeständigkeit sind die Geräte mit Öl ge-

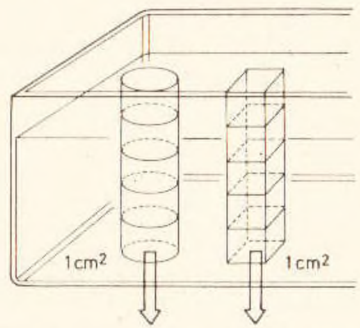
füllt. Die nebenstehende Abbildung macht das Prinzip deutlich. Ein Kolben mit einer kleinen Fläche dient zur Druckerzeugung. Herrscht in der Flüssigkeit ein Druck von 5 N/cm², dann müssen auch 5 N auf jeden cm² des großen Kolbens wirken. Dort beträgt die Druckkraft wegen der größeren Kolbenfläche 50 N. Aber auch hier gilt die goldene Regel der Mechanik: Was an Kraft eingespart wird, muß an Weg mehr aufgewandt werden. Wenn der kleine Kolben um 1 cm heruntergedrückt wird, geht der große nur um 0,2 cm hoch.



Hydraulische Presse

In beiden Zylindern wird dieselbe Flüssigkeitsmenge verdrängt.

2.1.2.4 Hydrostatischer Druck (Schweredruck)



Beim Tauchen im Schwimmbad merkt man, wie das Wasser mit zunehmender Tiefe immer stärker gegen das Trommelfell unseres Ohres drückt. Dieser Druck wird vom Gewicht der über uns ruhenden Flüssigkeit erzeugt. Um sich über die Größenordnung des Schweredrucks klarzuwerden, muß man sich vorstellen, daß sich oberhalb unseres Körpers eine Flüssigkeitssäule befindet. Jeder 1 cm hohe Abschnitt dieser Säule mit 1 cm² Grundfläche hat das Volumen von 1 cm³ und wiegt 0,01 N. Damit steigt der Druck für jeden hinzukommenden Zentimeter Wassersäule um 0,01 N/cm².

Tiefe	10 cm	1000 cm = 10 m	100 m
Druck	$0{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ = 0,01 bar	$10\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ = 1 bar	$100\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ = 10 bar

Bestimmung des Drucks in einer Flüssigkeit:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{G}{A}$$

Druck p auf die Fläche A.

$$G = m \cdot g$$

Das Gewicht läßt sich aus dem Produkt von Masse und Erdbeschleunigung berechnen.

$$G = V \cdot \varrho \cdot g$$

$$G = A \cdot h \cdot \varrho \cdot g$$

$$p = \frac{\cancel{A} \cdot h \cdot \varrho \cdot g}{\cancel{A}}$$

$\boxed{p = h \cdot \varrho \cdot g}$
Schweredruck in Flüssigkeiten

Setzt man jetzt in die Formel die Masse $m = \varrho \cdot V$ ein und schreibt schließlich für das Volumen $V = A \cdot h$, so erhält man für den Druck die nebenstehende Gesetzmäßigkeit. Diese Formel zeigt, daß der Schweredruck von der Höhe der Flüssigkeitssäule und von der Dichte abhängig ist. Die Gefäßform spielt überhaupt keine Rolle.

Luftdruckangaben:

1 bar = 10,2 mWS = 75,0 cmQuS
WS = Wassersäule
QuS = Quecksilbersäule

Den uns umgebenden Luftdruck kann man ohne weiteres mit dem Wasserdruck vergleichen, da wir uns am Boden eines Luftmeeres befinden. Der mittlere uns umgebende Luftdruck beträgt 1 bar.

Der Luftdruck kann durch einen Versuch nachgewiesen werden. Füllt man eine Flasche bis zum Rand voll mit Wasser, legt eine Pappscheibe darauf, stellt beides auf den Kopf und läßt die Pappscheibe los, dann bleibt die Flüssigkeit in der Flasche. Der Luftdruck ist also imstande, die Flüssigkeitssäule zu tragen. Diese Flüssigkeitssäule könnte theoretisch bis zu 10 m betragen. Dabei spielt der Durchmesser der Öffnung keine Rolle – es wirkt auf 1 cm^2 eine Kraft von rd. 10 N; auf 100 cm^2 also rd. 1000 N. Diese Zahlen machen deutlich, daß die durch den Luftdruck erzeugten Druckkräfte sehr groß sind.

Würde man einen Luftdruckmesser mit Wasser betreiben, müßte er mindestens 10,2 m hoch sein. Da Quecksilber 13,5mal so schwer wie Wasser ist, wird dabei nur eine Höhe von 0,76 m benötigt.

Beispiele:

a) Die maximal für den Menschen zulässige Tauchtiefe beträgt ca. 200 m. Wie groß ist der Druck in dieser Tiefe (Dichte von Wasser: 1 kg/dm^3)? Die Einheiten müssen umgestellt werden (1 m^2 = 10^4 cm^2)!

$$p = h \cdot \varrho \cdot g$$

$$p = 200\ \text{m} \cdot 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$p = 2\,000\,000\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 200\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

b) In einer Wasserleitung herrscht ein Druck von 6 bar = 60 N/cm^2. Welche Kraft wird benötigt, um einen Hahn (A = 1,5 cm^2) mit dem Daumen zuzudrücken?

$$F = p \cdot A = 60\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot 1{,}5\ \text{cm}^2 = 90\ \text{N}$$

Es ist eine Kraft von 90 N nötig, da auf einen cm^2 eine Kraft von 60 N wirkt.

c) Die Körperoberfläche eines Menschen beträgt ca. 4 m^2. Welche Druckkraft wirkt bei normalem Luftdruck auf den gesamten Körper?

$$F = p \cdot A$$

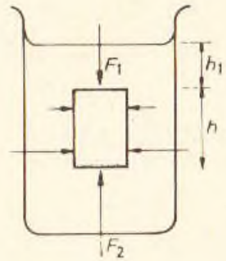
$$F = 10\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot 4 \cdot 10^4\ \text{cm}^2$$

$$F = 4 \cdot 10^5\ \text{N} = 400\,000\ \text{N}$$

2.1.2.5 Auftrieb

Gegenstände wirken unter Wasser leichter als an Land! Schon Archimedes entdeckte den Auftrieb!

Soll vom Grund eines Schwimmbades ein Gegenstand angehoben werden, so erscheint er leichter, als wenn er außerhalb des Beckens getragen wird. Es muß demnach eine Kraft von unten auf den Gegenstand wirken. Diese Kraft wird als Auftrieb bezeichnet.

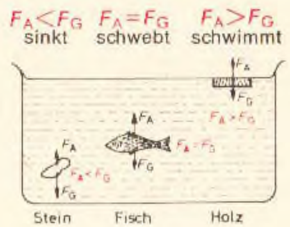


Wie kommt nun dieser Auftrieb zustande? Ein Körper, der in eine Flüssigkeit eintaucht, erfährt auf all seine Begrenzungsflächen Druckkräfte. Dabei sind die auf die Seitenflächen wirkenden Kräfte ohne Bedeutung, da sie gleich groß sind und sich aufheben. Jedoch sind die Kräfte, die von oben auf den Körper wirken, kleiner als die aufwärts gerichteten Druckkräfte. Der Auftrieb ist die Differenz davon ($F_A = F_2 - F_1$).

Salzwasser trägt wegen seiner größeren Dichte besser als Süßwasser!

Die Größe der Auftriebskraft wird durch das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge bestimmt. Aufgrund dieser Tatsache ist es leichter, in Salzwasser zu schwimmen als in Süßwasser.

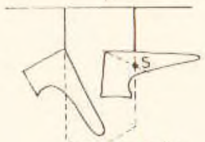
Der Auftrieb eines Körpers ist so groß wie die Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeit ($F_A = F_G$).



Körper, deren Gewicht größer als das der verdrängten Flüssigkeit ist, müssen deshalb sinken.

Sind Auftrieb und Gewicht gleich groß, schwebt ein Körper. Er schwimmt dagegen, wenn sein Gewicht kleiner als das der verdrängten Flüssigkeit ist.

2.1.3 Schwerpunkt



Schwerelinien

Das Turnen am Schwebebalken erfordert eine große Körperbeherrschung, um das Gleichgewicht zu halten. Ebenso verhält es sich, wenn man versucht, durch Unterstützen mit einem Finger einen Gegenstand zu balancieren, d. h. ihn im Gleichgewicht zu halten. Das gelingt nur dann, wenn der Körper genau in seinem Schwerpunkt unterstützt wird.

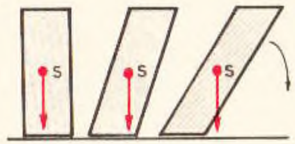
Wie ermittelt man aber den Schwerpunkt eines beliebigen Körpers? – Dazu wird er an mindestens zwei beliebigen Punkten aufgehängt, und es werden lotrechte Linien – sog. Schwerelinien – gezogen. Der Schwerpunkt liegt genau im Schnittpunkt der beiden Schwerelinien. Wird noch eine dritte Untersuchung durchgeführt, dann wird auch diese Schwerelinie durch den bereits ermittelten Schnittpunkt verlaufen.

Der Schwerpunkt befindet sich immer im Schnittpunkt der Schwerelinien. Unterstützt man einen Körper im Schwerpunkt, so befindet er sich im Gleichgewicht.

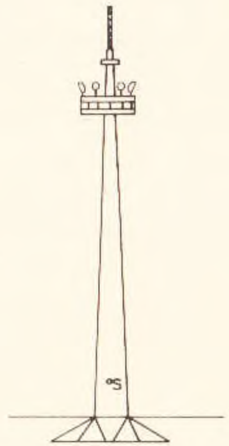
Beachte: Im Schwerpunkt kann man sich alle Gewichtskräfte zu einer Kraft vereinigt vorstellen.

Vorsicht bei Dachlast

Die Lage des Schwerpunktes ist auch für die Standfestigkeit eines Körpers verantwortlich. Bei Konstruktionen versucht man immer, den Schwerpunkt möglichst tief und in die Mitte eines Gegenstandes zu legen. Diese Maßnahmen werden auch im Automobilbau angewendet. Eine gute Straßenlage erhält man, wenn der Schwerpunkt möglichst tief und in der Mitte des Fahrzeugs liegt. Derartige Konstruktionen findet man bei Sportwagen, die einen Mittelmotor haben und möglichst flach gebaut sind. Ein beladener Dachgepäckträger wirkt sich negativ auf die Straßenlage aus. Ferner ist bei den meisten Fahrzeugen die Dachlast auf 50 kp bzw. 500 N begrenzt.



Die nebenstehenden Abbildungen zeigen, daß ein Körper so lange fest steht, wie sich der Schwerpunkt lotrecht über der Unterstützungsfläche befindet.



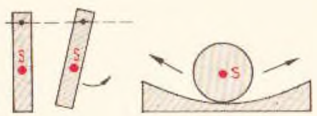
Bei sehr hohen Bauobjekten, wie bei einem Fernsehturm, wird eine hohe Standfestigkeit durch ein massives Fundament erreicht (große Unterstützungsfläche – niedrige Schwerpunktlage).

2.1.3.1 Gleichgewichtslagen

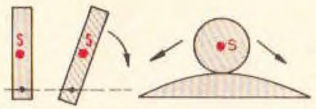
Eine Seilbahn kann jedoch so leicht nicht aus ihrer ursprünglichen Lage gebracht werden.

Die Gleichgewichtsorgane in unseren Ohren sorgen dafür, daß wir nicht „das Gleichgewicht verlieren" bzw. umfallen. Wir befinden uns dauernd in einer sog. labilen Gleichgewichtslage, denn bei Bewußtlosigkeit, wenn also die Muskeln nicht mehr arbeiten, fallen wir um.

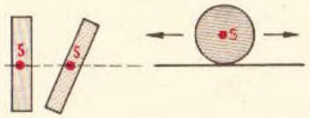
Es wird zwischen drei Gleichgewichtslagen unterschieden:



1. **Stabile Gleichgewichtslage**
   Liegt der Schwerpunkt **unterhalb** der Drehachse, so erhält man die stabile Gleichgewichtslage. Nach Antippen des Stabes oder der Kugel kehrt der Körper wieder in die ursprüngliche Lage zurück.



2. **Labile Gleichgewichtslage**
Wenn sich der Schwerpunkt **oberhalb** der Drehachse befindet, dann genügt die geringste Störung, um das Umschlagen in die stabile Gleichgewichtslage zu erreichen.



3. **Indifferente Gleichgewichtslage**
Liegt die Drehachse genau **im Schwerpunkt,** so verbleibt der Körper in jeder Lage in Ruhe.

Je nachdem, wo Schwerpunkt und Drehachse eines Körpers liegen, unterscheidet man zwischen stabiler, labiler und indifferenter Gleichgewichtslage.

2.1.4 Drehmoment

Drehmoment = Kraft · Hebelarm

$$M = F \cdot a$$

Einheit: Newtonmeter (Nm)

Immer dann, wenn eine Kraft außerhalb seines Drehpunktes auf einen Körper wirkt, erzeugt sie ein Drehmoment. Drehmoment ist das Produkt von Kraft und Hebelarm, also von Kraft und dem senkrechten Abstand ihrer Wirkungslinie zum Drehpunkt.

Beispiele:

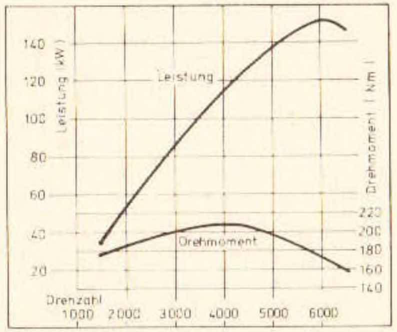
a) Zum Öffnen einer 1,5 m breiten Tür wird eine Kraft von 20 N benötigt. Welches Drehmoment wird erzeugt?

$M = F \cdot a$
$M = 20\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m}$
$M = 30\ \text{Nm}$

b) Die Zylinderkopfschrauben eines Motors müssen mit einem Drehmoment von 145 Nm angezogen werden. Welcher Hebelarm ist notwendig, wenn eine Kraft von 200 N erzeugt wird?

$M = F \cdot a$
$a = \frac{M}{F}$
$a = \frac{145\ \text{Nm}}{200\ \text{N}} = 0{,}725\ \text{m}$

Oftmals findet man in Autoprospekten Drehmomentkurven von Automobilmotoren. Die erreichbaren Drehmomente sagen etwas über die Elastizität (großes Drehmoment bei niedrigen Drehzahlen), über das Zugvermögen und die Bergsteigfähigkeit eines Automobils aus. Grundsätzlich haben großvolumige Motoren ein günstigeres Drehmoment als Motoren, die trotz geringen Hubraums große Leistungen erzeugen.



Motorkennlinie eines Pkw

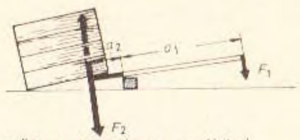
2.2 Einfache Maschinen

Goldene Regel der Mechanik
Was an Kraft gespart wird, muß an Weg zugesetzt werden.

Durch die Konstruktion einfacher Maschinen werden dem Menschen Hilfen an die Hand gegeben, um Kraft zu sparen – jedoch mit der Einschränkung, daß das, was an Kraft gespart wird, an Weg zusätzlich aufgewendet werden muß.

2.2.1 Hebel

Durch den Hebel wird Kraft gespart



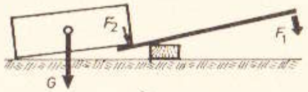
Kräfte und Hebelarme am Hebel

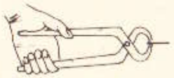
Häufig werden im täglichen Leben Hebel zur Kraftersparnis eingesetzt. Dies sind z. B. Kombizange, Hebelstange, Schraubenschlüssel, Schubkarre usw. Was ist also ein Hebel? – Ein Hebel ist ein starrer Körper mit einem Drehpunkt und zwei Hebelarmen, die als Kraft- und Lastarm bezeichnet werden. Ein Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Drehmomente an beiden Hebelarmen gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind (Normalfall). Das Hebelgesetz lautet demnach:

Drehmoment am Kraftarm = Drehmoment am Lastarm
Kraft · Kraftarm = Last · Lastarm
$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$

Ein Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Drehmomente an beiden Hebelarmen gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind.

Je nachdem, wo der Drehpunkt des Hebels liegt, wird zwischen einem zweiseitigen und einem einseitigen Hebel unterschieden:

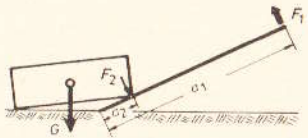


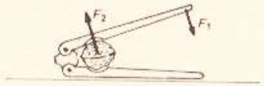


Zweiseitiger Hebel

Man bezeichnet einen Hebel als zweiseitig, wenn der Drehpunkt zwischen den angreifenden Kräften liegt.

Beispiel: Kneifzange





Einseitiger Hebel

Ist der Hebel an einem Ende gelagert, so bezeichnet man ihn als einseitigen Hebel.

Beispiel: Nußknacker

Beispiele:

a) Eine Kiste mit der Masse m = 300 kg soll angehoben werden. Wie lang muß der Kraftarm sein, wenn eine Kraft von 500 N aufgewendet werden kann und der Lastarm eine Länge von 0,2 m hat?

Gegeben: F_1 = 500 N; a_2 = 0,2 m
F_2 = 3 000 N

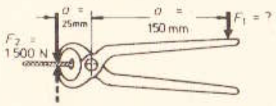
$$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$$

$$a_1 = \frac{F_2}{F_1} \cdot a_2$$

$$a_1 = \frac{3\,000\ \text{N}}{500\ \text{N}} \cdot 0{,}2\ \text{m}$$

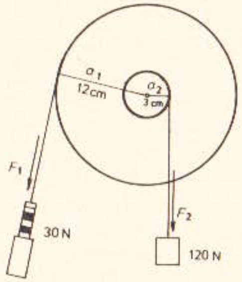
$$a_1 = 1{,}2\ \text{m}$$

b) Mit der dargestellten Zange soll ein Nagel durchtrennt werden. Es ist eine Kraft von 1500 N notwendig. Mit welcher Kraft muß die Zange betätigt werden?



$$F_1 = F_2 \cdot \frac{a_2}{a_1} = 1\,500\ \text{N} \cdot \frac{25}{150} = 250\ \text{N}$$

Beachte: Die Kraft wird nicht halbiert (Gegenkraft)!



Weitere Anwendungen des Hebels in der Technik:

Wellrad

Ein Wellrad besteht aus zwei miteinander starr verbundenen Scheiben verschiedenen Durchmessers, die auf einer gemeinsamen Achse (Welle) drehbar gelagert sind. Auch hier gilt das Hebelgesetz:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$$

In der Praxis findet man häufig anstelle des großen Rades eine Kurbel.

Riemen-, Ketten-, Zahnradübertragungen

Beim Fahrrad wird durch die Tretkurbel und das damit verbundene große Zahnrad (vgl.: Wellrad) eine große Kraft erzeugt. Mit Hilfe der Kette wird diese Kraft auf das hintere kleinere Zahnrad übertragen.

Am großen Zahnrad wird damit das Drehmoment

$$M_1 = F \cdot a_1$$

und am kleinen – es wirkt dort dieselbe Kraft – das Drehmoment

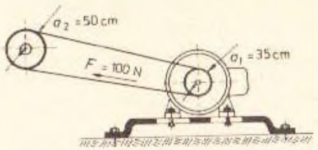
$$M_2 = F \cdot a_2$$

erzeugt.

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{F \cdot a_1}{F \cdot a_2}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Bildet man das Verhältnis beider Drehmomente, kann die Kraft gekürzt werden, und man kommt zu dem Ergebnis, daß sich die Drehmomente proportional zu den Hebelarmlängen (Radien) verhalten. Wegen der unterschiedlichen Drehmomente an den einzelnen Zahnrädern werden solche Antriebe auch als Drehmomentwandler bezeichnet.



$M_2 = a_2 \cdot F$
$M_2 = 0{,}5\ m \cdot 100\ N$
$M_2 = 50\ Nm$
$M_1 = a_1 \cdot F$
$M_1 = 0{,}35 \cdot 100\ Nm$
$M_1 = 35\ Nm$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{n_2}{n_1}$ z. B. $a_1 > a_2$, $n_1 < n_2$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{M_1}{M_2}$ **Drehmomentwandler**

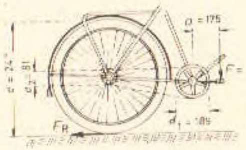
Ob nun die beiden Zahnräder direkt miteinander verbunden sind (Getriebe) oder anstelle der Kette ein Keilriemen verwendet wird, überall gelten dieselben Gesetzmäßigkeiten. Schließlich sei noch angeführt, daß durch die unterschiedlichen Radien auch Drehzahlveränderungen hervorgerufen werden, die z. B. bei einer Bohrmaschine (Keilriemenverstellung entsprechend dem Bohrerdurchmesser) Anwendung finden.

Die Drehzahl verhält sich dabei umgekehrt zu den Radien. Wird die Formel noch durch die Drehmomente ergänzt, dann fällt auf, daß auch die Drehmomente sich umgekehrt zu den Drehzahlen verhalten.

Beispiel:

Ein Radfahrer übt auf sein Pedal eine Kraft von $F = 100\ N$ aus.

1. Welches Drehmoment erzeugt er am hinteren Kettenrad?
2. Wie groß ist die Kraft F_R am Umfang des Hinterrads?
3. Wie groß ist das Drehzahlverhältnis von Tretkurbel und Hinterrad?



1" ≙ 25,4 mm

Lösungsgang:

1. Um das Drehmoment am hinteren Kettenrad (M_2) bestimmen zu können, muß zuerst das Drehmoment an der Tretkurbel M_1 berechnet werden, das mit dem des vorderen Kettenrads identisch ist (Hebelgesetz, Wellrad).

   Da die Drehmomente sich proportional zu den Radien bzw. Durchmessern der Kettenräder verhalten, kann das errechnete Drehmoment M_1 in die Verhältnisgleichung eingesetzt werden. Nach deren Umstellung wird das Drehmoment berechnet.

$M_{Kurbel} = M_1$
$M_1 = F_1 \cdot \ell$
$M_1 = 100\ N \cdot 0{,}175\ m$
$M_1 = 17{,}5\ Nm$

$M_{hint.\ Kettenrad} = M_2$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\frac{17{,}5\ Nm}{M_2} = \frac{189\ mm}{81\ mm}$$

$$M_2 = 17{,}5\ Nm \cdot \frac{81}{189}$$

$$M_2 = 7{,}5\ Nm$$

2. Mit Hilfe des Hebelgesetzes läßt sich die Kraft am Umfang des Hinterrads F_R berechnen. Die Drehmomente am Kettenrad und am Hinterrad sind identisch; die Formel ist also nur nach der Kraft am Hinterrad umzustellen. Dazu muß das angegebene Zollmaß in m umgerechnet werden (es muß der Radius von 12" eingesetzt werden).

$M_{Hinterrad} = M_3$
$M_2 = M_3$
$M_2 = F_R \cdot a_R$

$$F_R = \frac{M_2}{a_R}$$

$$F_R = \frac{7{,}5\ Nm}{12 \cdot 0{,}0254\ m}$$

$$F_R = \frac{7{,}5\ Nm}{0{,}305\ m}$$

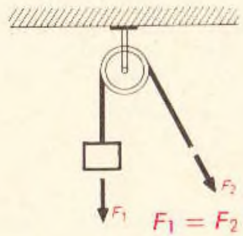
$F_R = 24{,}59\ N$

3. Das Drehzahlverhältnis von Tretkurbel n_1 und Hinterrad n_3 ergibt sich aus dem Verhältnis der beiden Radien bzw. Durchmesser. Dabei ist die Drehzahl umgekehrt proportional zu den Durchmessern.

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{a_3}{a_1}$$

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{305}{175} = 1{,}74$$

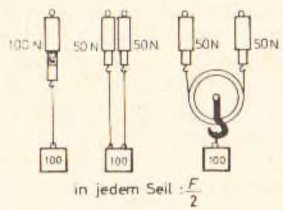
2.2.2 Feste Rolle



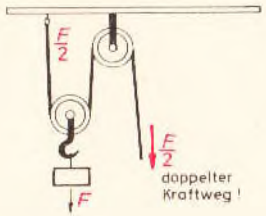
Wird an ein Seil, das über eine festverankerte Rolle geführt wird, ein Gewicht gehängt, dann zeigt der Kraftmesser stets die Kraft an, die durch das Gewicht vorgegeben ist. Durch die feste Rolle wird die Kraft also nur in eine andere Richtung umgelenkt.

Durch die feste Rolle wird die Kraft umgelenkt ($F_1 = F_2$).

2.2.3 Lose Rolle



Hängt man an eine Federwaage ein Gewicht $G = 100\ N$, so wird sie die entsprechende Kraft anzeigen. Wird jedoch eine zweite Federwaage an dem anderen Seilende befestigt und die Last in der Mitte aufgehängt, dann zeigt jede Federwaage 50 N an; die Kraft wird an jedem Seilende halbiert.



Der Kraftweg ist doppelt so groß wie der Lastweg!

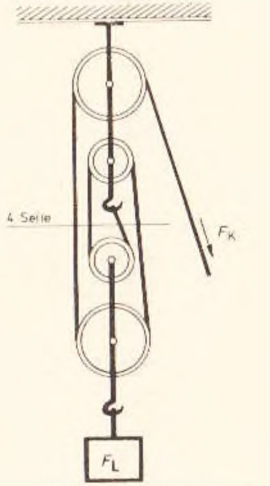
Befestigt man nun ein Seilende an einer starren Stange, hängt die Last an einer losen Rolle auf und lenkt die Kraft über eine feste Rolle um, so muß zum Heben der Last genau die Hälfte der Gewichtskraft aufgewendet werden. Dabei fällt jedoch auf, daß an dem Seil um z. B. 10 cm gezogen werden muß, damit sich die Last um 5 cm hebt. Auch hier gilt:

Was an Kraft eingespart wird, muß an Weg hinzugesetzt werden.

Bei einer losen Rolle ist die aufgewendete Kraft F_2 nur $^1/_2$mal so groß wie die zu bewältigende Last F_1.

Dabei ist der Kraftweg doppelt so groß wie der Lastweg.

2.2.4 Flaschenzug

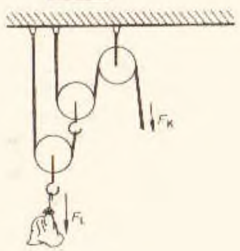


Ein Flaschenzug besteht aus der Kombination jeweils gleich vieler loser und fester Rollen. Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Flaschenzug mit vier Rollen, also mit zwei losen und zwei festen Rollen. Die Last wird auf die Anzahl n der tragenden Seile verteilt.

Es gilt demnach die Formel:

$$F_K = \frac{1}{n} \cdot F_L$$

Der Kraftweg verlängert sich dabei auf das n-fache. Flaschenzüge finden überall dort Verwendung, wo schwere Lasten gehoben werden sollen.



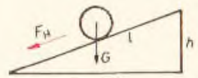
Ein weiterer Flaschenzugtyp ist der sog. Potenzflaschenzug. Die Abbildung macht deutlich, daß bei gleichem Kraftaufwand für jede lose Rolle die Last jeweils verdoppelt werden kann. Bei 2 Rollen: $2^2 = 4$ (4fach); bei 3 Rollen: $2^3 = 8$ (8fach); bei 4 Rollen: $2^4 = 16$ (16fach) und bei n Rollen 2^n-fache Kraftersparnis. Es gilt also:
für n lose Rollen: $F_L = 2^n \cdot F_K$.

2.2.5 Schiefe Ebene

Um eine schwere Last auf die Ladefläche eines Lkw zu befördern, bedient man sich häufig einer sog. Schrotleiter. Eine solche Anordnung wird als schiefe Ebene bezeichnet. Ziel ist es nun, eine Gesetzmäßigkeit für die Kraft (die sog. Hangabtriebskraft) an der schiefen Ebene zu finden.

Die Gewichtskraft G kann man sich in zwei Teilkräfte zerlegt denken:

1. eine parallel zur schiefen Ebene wirkende **Hangabtriebskraft** F_H und
2. die senkrecht auf die schiefe Ebene wirkende **Normalkraft** F_N.



Die Hangabtriebskraft ist Ursache für Bewegungsvorgänge auf der schiefen Ebene, die Normalkraft ist dagegen verantwortlich für die Reibung.

G N	ℓ m	h m	$\frac{h}{\ell}$	F_H N
100	1,5	0,3	0,2	20
100	1,5	0,5	0,33	33
100	1,5	1,0	0,66	66
200	1,5	0,3	0,2	40
200	1,5	0,5	0,33	66
200	1,5	1,0	0,66	132
500	2	1,5	0,75	375

Die nebenstehende anhand eines Versuchs ermittelte Tabelle zeigt, daß die Hangabtriebskraft den folgenden Größen direkt proportional ist:

– dem Gewicht G,
– der Steigung $\frac{h}{\ell}$.

Demnach kann für die Hangabtriebskraft F_H geschrieben werden:

$$F_H = G \cdot \frac{h}{\ell}$$ (Ohne Berücksichtigung der Reibung!)

Die Hangabtriebskraft F_H ist abhängig vom Gewicht des Körpers und der Steigung der schiefen Ebene.

Beispiele:

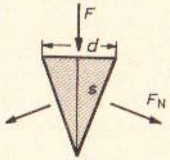
a) Ein Radfahrer (G = 800 N einschließlich Fahrrad) muß eine Steigung von 0,75 bewältigen. Welcher Kraftaufwand ist notwendig?

$$F_H = G \cdot \frac{h}{\ell} = 800\ \text{N} \cdot 0{,}75 = 600\ \text{N}$$

b) Wie schwer ist ein Pkw, der eine Steigung von 20 % mit einer Kraft von 2 500 N überwindet?

$$G = F_H \cdot \frac{\ell}{h} = 2\,500\ \text{N} \cdot \frac{1}{0{,}2} = 12\,500\ \text{N}$$

2.2.5.1 Keil



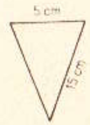
Eine weitere Anwendung der schiefen Ebene ist der Keil. Er besteht aus zwei zusammengefügten schiefen Ebenen.

Für den Keil gilt entsprechend der schiefen Ebene folgende Gesetzmäßigkeit (F_N = Flankenkraft; F = Belastung):

$$F_N = F \cdot \frac{s}{d}$$

Beispiel:

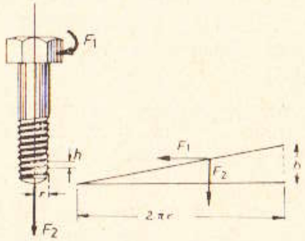
Beim Spalten eines Holzstücks wird ein Keil mit 1 000 N belastet. Wie groß ist die Flankenkraft des Keils, also mit welcher Kraft wird das Holz gespalten, bzw. welche Zusammenhaltskräfte des Holzes müssen überwunden werden?



$$F_N = F \cdot \frac{s}{d} = 1\,000 \text{ N} \cdot \frac{15}{5}$$

$$F_N = 3000 \text{ N}$$

2.2.5.2 Schraube



Eine Schraube kann mit einer um eine Achse gewickelten schiefen Ebene verglichen werden.

F_1 = die zur Drehung der Schraube erforderliche Kraft, die im Abstand r wirksam ist,

F_2 = die in Achsrichtung wirksame Kraft,

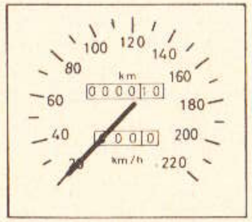
h = die Ganghöhe der Schraube und

r = der mittlere Gewinderadius.

Es gilt: $F_1 = F_2 \cdot \dfrac{h}{2\pi r}$

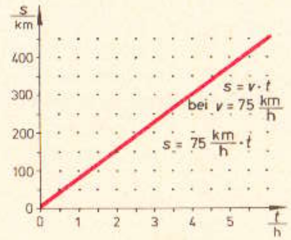
2.3 Kinematik (Bewegungslehre)

2.3.1 Geschwindigkeit

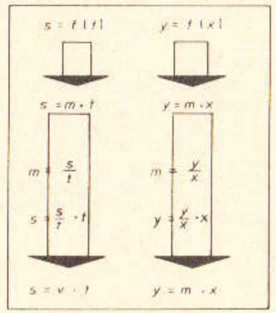


Das Tachometer eines Autos zeigt dessen Geschwindigkeit in km/h an. Es wird also angezeigt, wieviele km man pro (in einer) Stunde (h) zurücklegt. Wurde eine Strecke s von 300 km in einer Zeit von t gleich 4 h gefahren, so ist die Durchschnittsgeschwindigkeit v der Quotient aus der Strecke s und der Zeit t:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{300 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Das nebenstehende s-t-Diagramm zeigt, daß die Geschwindigkeit nichts anderes als die Steigung der Funktion $s = f(t)$ ist. Vergleicht man $s = f(t)$ mit $y = f(x)$, so ergeben sich folgende Gegenüberstellungen:

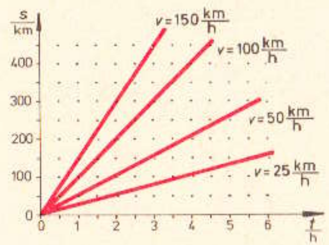


Setzt man anstelle von y ein s und von x ein t, dann sind beide Funktionen identisch.

In die Geradengleichung wird die Steigung m eingesetzt.

Jetzt wird die Steigung berechnet und in die Funktionsgleichung eingesetzt.

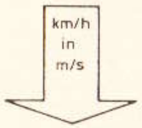
Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeit nichts anderes als die Steigung der Funktion $s = f(t)$ ist.



Das führt wiederum zu folgender Erkenntnis:

Je steiler die Gerade in einem s-t-Diagramm verläuft, desto höher ist die Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit v ist der Quotient aus der Strecke s und der Zeit t ($v = s/t$). Die Größe der Geschwindigkeit wird im s-t-Diagramm durch die Steigung der Geraden angegeben.



Außer in km/h bzw. $km \cdot h^{-1}$ wird die Geschwindigkeit auch häufig in m/s ($= ms^{-1}$) angegeben. Um auf diese Einheit umzurechnen, werden Zähler und Nenner des Bruchs entsprechend erweitert:

$$1\,\frac{km}{h} = \frac{1\,000\ m}{3\,600\ s} = \frac{1\ m}{3{,}6\ s}$$

1 km = 1 000 m und 1 h = 3 600 s

$$\boxed{\begin{array}{c} 1\ km/h = \frac{1}{3{,}6}\ m/s \\ 3{,}6\ km/h = 1\ m/s \end{array}}$$

Soll von km/h in m/s umgerechnet werden, ist der Zahlenwert durch 3,6 zu dividieren – umgekehrt muß mit 3,6 multipliziert werden, wenn von m/s in km/h umgerechnet werden soll.

Daraus folgt:

$$100\ km/h = \frac{100}{3{,}6}\ m/s = 27{,}78\ m/s$$

$$10\ m/s = 10 \cdot 3{,}6\ km/h = 36\ km/h$$

Fußgänger	5... 6 km/h
Radfahrer	15... 20 km/h
Kraftwagen	50...180 km/h
D-Zug	bis 150 km/h
Schiff	36 km/h
Flugzeug	500...3500 km/h
Schall	333 m/s (= 1198,8 km/h = 1 Mach)
Licht	300 000 km/s

Die nebenstehende Tabelle liefert einen Überblick über Geschwindigkeiten, die uns im täglichen Leben begegnen.

Beispiele:

a) Auf der Autobahn fährt ein Pkw mit einer Geschwindigkeit von 130 km/h. Wieviel Meter legt er in einer Sekunde zurück?

$$130\,\frac{km}{h} = \frac{130\ m}{3{,}6\ s} = 36{,}11\ m/s$$

b) Ein Radfahrer bewältigt eine Strecke von 23,5 km in 1 h 24 min. Wie groß war seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

1 h 24 min = 1,4 h

$$v = \frac{s}{t} = \frac{23{,}5\ km}{1{,}4\ h} = 16{,}79\ km/h$$

c) Ein Flugzeug fliegt mit 2facher Schallgeschwindigkeit. Welche Zeit benötigt es für die Strecke München–Hamburg (ca. 800 km)?

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$$

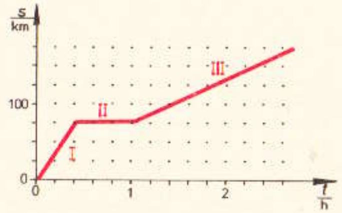
$$t = \frac{800\,000\ m}{2 \cdot 333\ m/s} = 1201{,}2\ s$$

$$t = \frac{1201{,}2\ h}{3600}$$

$t = 0{,}33$ h

$t = 19{,}8$ min

d) Das nebenstehende Diagramm wurde während der Fahrt eines Pkw aufgenommen. Welche Bedeutung haben die einzelnen Kurvenabschnitte?



I. Der Wagen fährt mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 187,5 km/h.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{75\ km}{0{,}4\ h} = 187{,}5\ km/h$$

II. Die Steigung ist 0 – der Wagen steht. Es wird in der Zeit von 0,6 h keine Strecke zurückgelegt.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{0\ km}{0{,}6\ h} = 0\ km/h$$

III. Die Geschwindigkeit beträgt 53,6 km/h.

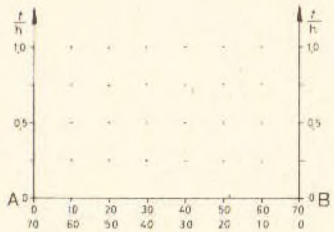
$$v = \frac{s}{t} = \frac{75\ km}{1{,}4\ h} = 53{,}6\ km/h$$

e) Zwei Orte A und B sind 70 km voneinander entfernt. Zwei Pkw fahren zur selben Zeit von A und B los. Sie bewegen sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aufeinander zu.
Dabei sind $v_A = 55$ km/h
und $v_B = 70$ km/h.
Nach welcher Zeit und in welcher Entfernung von A bzw. B treffen sie sich? – Die Lösung ist grafisch durchzuführen.

Dieses Beispiel ist vergleichbar mit der Bestimmung des Arbeitspunktes zweier in Reihe geschalteter Widerstände.

Lösungsgang:

Es ist ein Koordinatensystem zu zeichnen, dessen Achsen im Gegensatz zur üblichen Darstellung vertauscht sind. Auf der waagerechten Achse kann einmal die Strecke AB von links nach rechts und in entgegengesetzter Richtung die von B nach A eingetragen werden. Die Geraden werden wie folgt eingetragen:

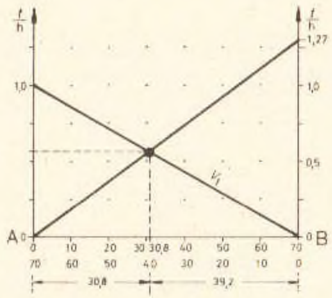


Pkw von A: Es ist die Fahrzeit zu berechnen, die der Pkw braucht, um nach B zu gelangen.

$$t_A = \frac{s}{v_A} = \frac{70}{55}\ \text{h} = 1{,}27\ \text{h}$$

Pkw von B:

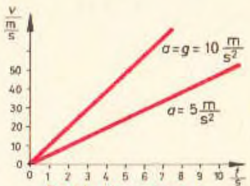
$$t_B = \frac{s}{v_B} = \frac{70}{70}\ \text{h} = 1\ \text{h}$$



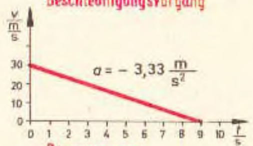
Sind beide Geraden gezeichnet, dann liefert der Schnittpunkt die Fahrzeit, die beide Fahrzeuge bis zum Treffpunkt benötigt haben und die zurückgelegten Strecken von A und B!

Fahrzeit $t = 0{,}56$ h
Strecke AT = 30,8 km
Strecke BT = 39,2 km

2.3.2 Gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Bewegung

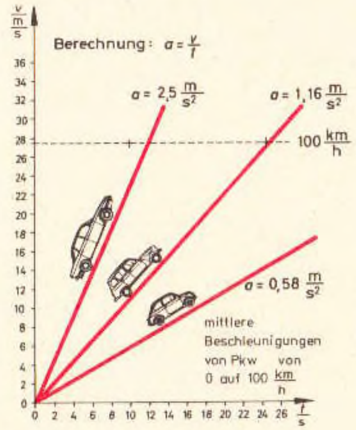


Beschleunigungsvorgang



Bremsvorgang

Bekanntlich beträgt die Erdbeschleunigung rd. 10 m/s² bzw. 10 ms⁻², d. h., die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nimmt in 1 s um ca. 10 m/s zu. Die nebenstehenden Diagramme zeigen einmal eine Beschleunigung (pos. Steigung) und zum anderen einen Bremsvorgang (neg. Beschleunigung bzw. neg. Steigung). Neben dem *v-t*-Diagramm ist auch das *s-t*-Diagramm, also die zurückgelegte Strecke während einer beschleunigten Bewegung, zu untersuchen.



a) *v-t*-**Diagramm**

Bei einer Geschwindigkeitszunahme von 10 m/s in 1 s kann die folgende Funktionsgleichung geschrieben werden:

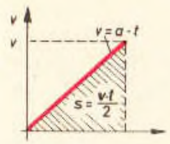
$$v = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t$$

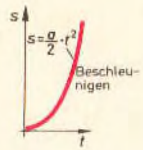
Setzt man für die Beschleunigung den Buchstaben *a* in die Formel ein, so ergibt sich die allgemeine Formel

$v = a \cdot t$ vgl.: $y = m \cdot x$

Die Beschleunigung ist also die Steigung der Funktion $v = f(t)$. Wird die Formel nach *a* umgestellt und die Einheitenprobe durchgeführt, kommt man zu der bekannten Einheit für die Beschleunigung.

Die Beschleunigung ist der Quotient aus der Geschwindigkeit *v* und der Zeit *t* ($a = v/t$). Je steiler die Gerade in einem *v-t*-Diagramm verläuft, desto größer ist die Beschleunigung.





b) *s-t*-**Diagramm**

Im *v-t*-Diagramm entspricht der Weg *s* dem Flächeninhalt des schraffierten Dreiecks.

Vgl.: $F = \frac{gh}{2}$ oder $s = \frac{v \cdot t}{2}$

Wird *v* durch $a \cdot t$ ersetzt, so ergeben sich die nebenstehenden Formeln.

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Bei einer beschleunigten Bewegung nimmt also die zurückgelegte Strecke mit der Zeit quadratisch zu.

Wird anstelle von $t = \frac{v}{a}$ eingesetzt, so ergibt sich noch folgender Zusammenhang:

$$s = \frac{v \cdot v}{2 \cdot a} = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2as}$$

Unter der Beschleunigung a versteht man das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der dafür benötigten Zeit t. Die dabei zurückgelegte Strecke nimmt mit der Zeit t quadratisch zu.

Zusammenfassung der Formeln:

$$s = \frac{vt}{2}; \qquad s = \frac{at^2}{2}; \qquad v = at; \qquad v = \sqrt{2as}$$

Beispiele:

a) Ein Pkw beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 11,3 s. Welche mittlere Beschleunigung liegt vor?
Um gleiche Einheiten zu erhalten, wird in m/s umgewandelt.

$$v = a \cdot t \rightarrow a = \frac{v}{t}$$

$$a = \frac{100 \text{ km/h}}{11{,}3 \text{ s}}$$

$$a = \frac{27{,}78 \text{ m/s}}{11{,}3 \text{ s}}$$

$$a = 2{,}46 \text{ ms}^{-2}$$

b) Welche Strecke wurde während der im Beispiel a) berechneten Beschleunigung zurückgelegt?

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{27{,}78 \text{ m/s} \cdot 11{,}3 \text{ s}}{2}$$

$$s = 156{,}96 \text{ m}$$

c) Bei einem Autotest wurde ermittelt, daß ein Pkw für eine Strecke von 1 000 m eine Zeit von 46 s benötigt. Wie groß war die mittlere Beschleunigung, und welche Geschwindigkeit fuhr der Wagen nach der gefahrenen Strecke?

Dieser Wert macht deutlich, daß die Beschleunigung eines Pkw keineswegs gleichmäßig ist, sondern daß die Beschleunigung mit zunehmender Geschwindigkeit abnimmt. Hier wurde der Einfachheit halber eine mittlere Beschleunigung errechnet.

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2} \rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

$$a = \frac{2000 \text{ m}}{46^2 \text{ s}^2}$$

$$a = \frac{2000 \text{ m}}{2116 \text{ s}^2}$$

$$a = 0{,}945 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zum Vergleich: Derselbe Wagen beschleunigt von 0–100 km/h in 11,6 s, was einem mittleren a von 2,38 m/s² entspricht!

Die Endgeschwindigkeit ist das Produkt von Beschleunigung und Zeit.

$$v = a \cdot t = 0{,}945 \text{ ms}^{-2} \cdot 46 \text{ s}$$

$$v = 43{,}47 \text{ ms}^{-1}$$

$$v = 43{,}47 \cdot 3{,}6 \text{ kmh}^{-1}$$

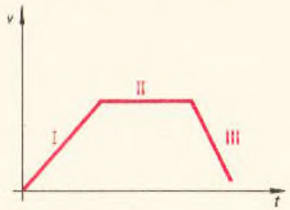
$$v = 156{,}5 \text{ kmh}^{-1}$$

d) Das nebenstehende v-t-Diagramm zeigt drei Kurvenabschnitte. Es soll der jeweilige Fahrzustand beschrieben werden.

I. Beschleunigung

II. Keine Beschleunigung ($a = 0$), d. h., der Wagen fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

III. Der Wagen wird abgebremst.

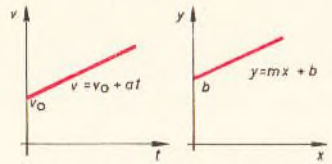


e) Das nebenstehende Diagramm zeigt, daß das Fahrzeug, bevor es beschleunigt wurde, bereits eine Anfangsgeschwindigkeit hatte. Wie lautet die allgemeine Formel?

Zum Vergleich:
$y = mx + b \rightarrow v = at + v_0$

Formel: $\boxed{v = at + v_0}$

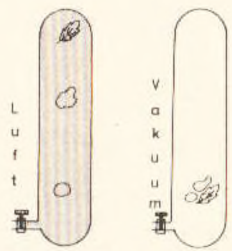
Zum Vergleich:



2.3.2.1 Freier Fall

Formeln:

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	Freier Fall
$v = at$	$v = gt$
$s = \frac{at^2}{2}$	$h = \frac{gt^2}{2}$
$s = \frac{vt}{2}$	$h = \frac{vt}{2}$
$v = \sqrt{2as}$	$v = \sqrt{2gh}$



Der Reibungswiderstand der Luft hemmt die Fallbewegung. Bei Berechnungen kann er gegebenenfalls vernachlässigt werden.

Der freie Fall ist eine Sonderform der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit. Nach nebenstehender Tabelle ergeben sich die Formeln für den freien Fall aus den Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung, wenn anstelle der Beschleunigung a die Erdbeschleunigung g und anstelle der Strecke s die Fallhöhe h eingesetzt wird.

An diesen Formeln erkennt man, daß die Masse keinen Einfluß auf die Fallgeschwindigkeit hat. Bei diesen Betrachtungen wurde natürlich der Reibungswiderstand der Luft nicht berücksichtigt. Ob also eine leichte Feder oder ein schwerer Bleiklumpen aus einer beliebigen Höhe auf den Boden fällt; die Geschwindigkeit v wäre im luftleeren Raum gleich.

Bei den nachfolgenden Beispielen wird mit dem gerundeten Wert für g, also mit 10 m/s² gerechnet.

Beispiele:

a) Wie groß ist die Aufprallgeschwindigkeit v, mit der ein vom Kölner Dom herunterfallender Stein auf den Erdboden trifft? Die Höhe des Kölner Domes beträgt ca. 185 m.
Wie lang ist die Fallzeit?

$v = \sqrt{2gh}$

$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 185}$ m/s

$v = \sqrt{3700}$ m/s

$v = 60{,}83$ m/s $= 218{,}98$ km/h

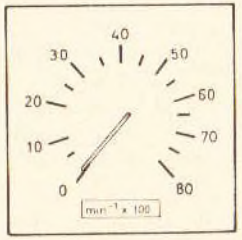
$t = \frac{v}{g} = \frac{60{,}83 \text{ s}}{10} = 6{,}083$ s

b) Gegeben: $v = 333$ m/s; $t = 100$ s
Gesucht: h

$h = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{333 \cdot 100 \text{ s}}{2} = 16650$ m

2.3.3 Drehbewegung

2.3.3.1 Drehzahl



Drehzahlmesser in einem Pkw

Der Drehzahlmesser in einem Kfz gibt Auskunft darüber, wie häufig sich die Kurbelwelle eines Motors in einer Minute dreht. Es können Größen von z. B. $3\,000 \frac{1}{\text{min}}$ ($= 3\,000$ min^{-1}) oder bei einem Rennmotor gar $12\,000$ min^{-1} abgelesen werden.

Beachte: Früher schrieb man für die Drehzahl die Einheit $\frac{\text{U}}{\text{min}}$. Die Angabe U (Umdrehungen) ist keine gesetzliche Einheit und darf nicht verwendet werden.

$$n = \frac{z}{t}$$

Wird während einer Zeit t die Anzahl z der Umdrehungen gemessen, dann ist die Drehzahl – auch Drehfrequenz genannt – der Quotient aus den Umdrehungen und der Zeit t.

Beispiele:

a) Ein Automotor hat eine Höchstdrehzahl von 6 400 min^{-1}. Wieviele Umdrehungen macht er in 1 s?

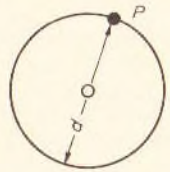
$n = 6\,400 \text{ min}^{-1} = \frac{6400}{60} \text{ s}^{-1}$

$n = 106{,}67 \text{ s}^{-1}$

b) Das Rad eines Pkw ($d = 0{,}6$ m) hat eine Umdrehungszahl von 1150 min^{-1}. Welche Strecke legt das Fahrzeug in 1 h zurück?

Felgengröße: $5^1/_2$ J × 13
Bereifung: 165 SR 13
Strecke s **(in 1 min)**: $s = n \cdot U = n \cdot d \cdot \pi$
$s = 1\,150 \cdot 0{,}6 \cdot 3{,}14$
$s = 2166{,}6$ m
in 1 h: $s = 2166{,}6 \cdot 60$ m
$s = 129996$ m $= 129{,}996$ km
v_{Rad}: $v = 129{,}996$ km/h

2.3.3.2 Umfangsgeschwindigkeit



Die Geschwindigkeit eines Punktes P auf dem Umfang einer Scheibe ist proportional dem Durchmesser und der Drehzahl der Scheibe.

Zum Vergleich: $v = \frac{s}{t}$

s bedeutet, wie oft (n) der Umfang $d \cdot \pi$ durchlaufen wird.
Bei $n = 10$ ist die zurückgelegte Strecke $10 \cdot d \cdot \pi$.

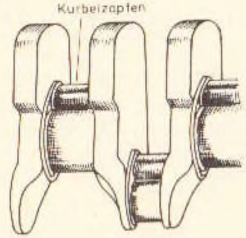
t bedeutet die Zeit, für die die Anzahl der Umdrehungen angegeben wurde.

Umfangsgeschwindigkeit = Umfang · Drehzahl

$v_u = U \cdot n$

$v_u = d \cdot \pi \cdot n$

$v_u = d \cdot \pi \cdot \frac{z}{t}$



Um z. B. die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens der Kurbelwelle von modernen Automotoren klein zu halten, wurde das Verhältnis Hub zu Kolbendurchmesser klein gehalten (1 : 1 bis 0,8 : 1 = Hub : Kolbendurchmesser).

Beispiele:

a) Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit einer Schleifscheibe mit $d =$ 400 mm Durchmesser bei einer Drehzahl von 1 700 min^{-1}? Die Umfangsgeschwindigkeit ist in km/h und m/s anzugeben.

$v_u = d \cdot \pi \cdot n$

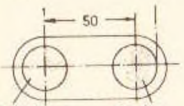
$v_u = 0{,}4 \text{ m} \cdot \pi \cdot 1\,700 \frac{1}{\text{min}}$

$v_u = 2135{,}2 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

$v_u = 2135{,}2 \cdot \frac{\text{m}}{60 \text{ s}} = 35{,}59 \text{ ms}^{-1}$

$v_u = 35{,}59 \cdot 3{,}6 \text{ kmh}^{-1} = 128{,}12 \text{ kmh}^{-1}$

b) Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens einer Kurbelwelle, wenn der Kolben einen Hub von 100 mm und der Motor eine Drehzahl von 3 600 min^{-1} ($= 60$ s^{-1}) hat (entspricht ungefähr einer Fahrzeuggeschwindigkeit von 100 kmh^{-1})?



$v_u = d \cdot \pi \cdot n = 0{,}1 \text{ m} \cdot \pi \cdot 60 \frac{1}{\text{s}}$

$= 0{,}1 \text{ m} \cdot 3{,}14 \cdot 60 \frac{1}{\text{s}}$

$= 18{,}84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

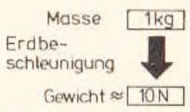
2.4 Dynamik

Wirkt auf einen Körper mit der Masse 1 kg die Kraft 1 N, so wird er mit 1 m/s^2 beschleunigt, d. h., seine Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 1 m/s zu.

Kraft = Masse mal Beschleunigung
$F = m \cdot a$

Die Einheit der Kraft ist N (Newton)!

Geschwindigkeitszunahme (Beschleunigung) auf der Erde und auf dem Mond.



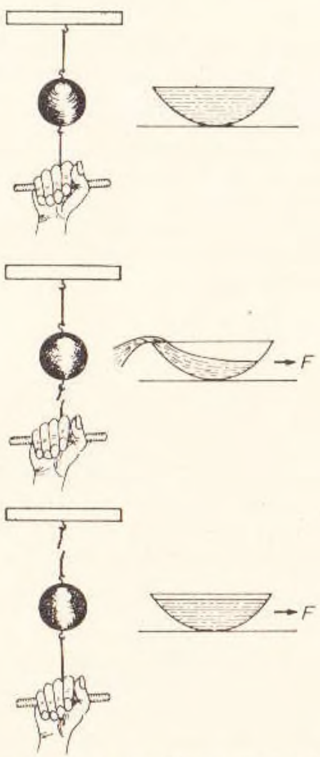
$\boxed{G = m \cdot g}$

Körper werden beschleunigt, wenn eine Kraft auf sie wirkt. Das geschieht z. B. beim Werfen eines Balls oder beim Stoßen einer Stahlkugel. Diese beiden Beispiele machen bewußt, daß die Masse (Trägheit) der Beschleunigung entgegenwirkt. So kann bei gleichem Kraftaufwand der Ball (kleine Masse) weiter geworfen werden (größere Beschleunigung) als die Stahlkugel (große Masse) gestoßen werden kann.

Läßt man einen Körper frei fallen, so wird er durch die Erdanziehungskraft beschleunigt. Die Geschwindigkeitszunahme eines Körpers auf der Erde beträgt 9,81 m/s^2, auf dem Mond dagegen nur 1,57 m/s^2.

Aufgrund dieser Tatsache ist das Gewicht eines Gegenstandes ebenfalls eine Kraft. Da die Anziehungskraft (Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ m/s^2$) auf jeden Körper mit der Masse m wirkt, wird das Gewicht auch als Gewichtskraft bezeichnet.

2.4.1 Massenträgheit



Zum Vergleich:

Hängt man eine schwere Eisenkugel an einen Faden und bringt unterhalb der Kugel einen gleichstarken Faden mit einem Griff an, so wird einmal beim ruckartigen und zum anderen beim langsamen Ziehen folgendes beobachtet:

a) **Ruckartiges Ziehen**
Der Faden reißt unterhalb der Kugel ab, da die Masse versucht, ihre Lage nicht zu verändern; sie ist träge. Man spricht deshalb von der Massenträgheit.

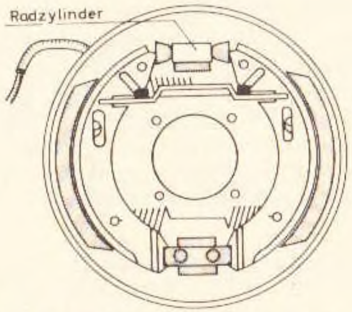
b) **Langsames Ziehen**
Jetzt reißt der Faden oberhalb der Kugel ab. Auf den unteren Faden wirkt nur die beim Ziehen aufgewendete Kraft, während auf den oberen zusätzlich das Gewicht der Kugel wirkt.

Bei einem Aufprall mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h sind wir nicht mehr in der Lage, uns festzuhalten, also der Massenträgheit unseres Körpers entgegenzuwirken.

Ähnliches beobachtet man auch beim Anfahren bzw. Bremsen eines Autos. Dabei werden wir einmal in die Sitze gepreßt und zum anderen nach vorne bewegt. Beim Bremsen oder gar bei einem Unfall will unser Körper in der gleichförmigen Bewegung bleiben. Deshalb ist es ratsam, Sicherheitsgurte zu tragen, die der Massenträgheit entgegenwirken.

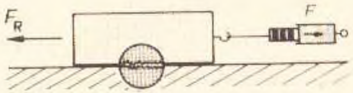
Alle Körper haben das Bestreben, im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung zu verbleiben; sie sind träge.

2.4.2 Reibung



Reibung muß sein:
Trommelbremse

Die Erfahrung zeigt, daß im Winter bei Glatteis wesentlich vorsichtiger gefahren werden muß als bei trockener Straße. Die Haftung der Reifen ist bei Glatteis etwa 5- bis 10mal geringer als bei trockener Straße – man sagt auch, die Reibung nimmt bei Glatteis ab. Wie kommt nun diese Reibung zustande?

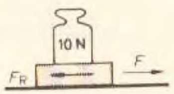


Jeder Körper hat eine rauhe Oberfläche. Aufgrund dieser Tatsache verzahnen sich die Oberflächen ineinander, und es muß beim Ziehen eines Klotzes eine Kraft aufgebracht werden, die als Reibungskraft bezeichnet wird.

Die Reibungskraft ist abhängig von:

a) dem Gewicht G des Körpers (D. h., mit zunehmendem Gewicht wird die zu überwindende Reibungskraft größer – die Reibungskraft ist also proportional dem Gewicht.);

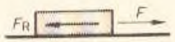
kleine Reibungskräfte



große Reibungskräfte

b) dem Material, d. h. von dessen mehr oder weniger rauhen Oberfläche. Die Materialeigenschaft wird durch die Reibungszahl μ wiedergegeben.

Glas



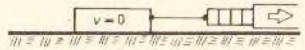
Holz

Für die Reibungskraft F_R gilt demnach:

$$F_R = \mu \cdot G$$

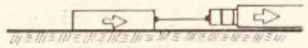
Die Formel gilt nur für Reibungsvorgänge auf waagerechten Unterlagen. Bei schräg liegenden Reibungsflächen muß anstelle G die senkrecht zur Reibungsfläche wirkende Kraft F_N eingesetzt werden. Diese senkrecht auf die Reibungsfläche wirkende Kraft wird auch als Normalkraft bezeichnet.

Die Größe der Reibungsfläche hat keinen Einfluß auf die Größe der Reibungskraft!



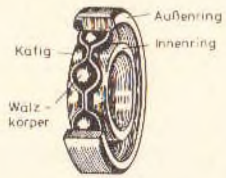
Haftreibung

Bei dem Versuch, die Reibungskraft zu ermitteln (ziehen eines Klotzes auf verschiedenen Unterlagen und bei Verwendung verschiedener Gewichte), stellt man fest, daß die Kraft, die aufgewendet werden muß, um den Körper erst einmal in Bewegung zu versetzen, stets größer ist als bei der eigentlichen Bewegung. Diese Reibung wird **Haftreibung** genannt, während diejenige beim Gleiten des Körpers als **Gleitreibung** bezeichnet wird.



Gleitreibung

Die vier Räder eines Wagens sollen mit der Straße immer in Haftreibung bleiben, gingen sie nämlich bei starker Kurvenfahrt in Gleitreibung über, dann würde das Fahrzeug aus der Kurve schleudern.



Um eine starke Reibung zu vermeiden, muß man Oberflächen polieren und schmieren. Bei Kugellagern wird die Oberfläche der sich berührenden Materialien sehr klein gehalten. Zusätzlich wird noch gefettet. Eine solche Reibung wird als **Rollreibung** bezeichnet.
Bekanntlich entsteht bei starker Reibung Wärme. Es kann sogar passieren, daß ein Lager, wenn es nicht genügend eingefettet ist, heißläuft. Beim Reibungsschweißen werden zwei Kunststoffteile auf einer Drehbank eingespannt, aneinandergedrückt, und durch Drehbewegung entsteht eine solch große Reibungswärme, daß die beiden Teile miteinander verschweißen.

Beim Reibungsschweißen kann durch die Luft die Wärme nicht mehr abgeführt werden. Das Reibungsschweißen ist eine neue Technologie und zugleich ein Problem im Weltenraum.

$$F_{Haft} > F_{Gleit} > F_{Roll}$$

Reibung muß auch sein:

Knoten

Oftmals ist die Reibung unerwünscht, weil sie stets Verluste mit sich bringt, aber man bedenke, daß ohne Reibung kein Nagel in der Wand halten würde, kein Fahrzeug gebremst werden könnte, Knoten sich von selbst auflösen würden, wir beim Gehen dauernd ausgleiten würden usw.

	Haftreibung μ_0	**Gleitreibung** trocken μ	**Gleitreibung** geschmiert μ
Stahl auf Stahl	0,2–0,3	0,1–0,2	0,02–0,05
Holz auf Holz	0,4–0,5	0,3–0,4	0,1–0,2
Gummi auf Asphalt	0,9	0,8–0,9	naß: 0,45
Gummi auf Glatteis		0,15	

Durchschnittswerte für Reibungszahlen verschiedener Materialien.

Es wird zwischen Haft-, Gleit- und Rollreibung unterschieden. Durch Reibung entsteht Wärme.

Bewegung und Reibung gehören immer zusammen!

Schließlich wäre noch anzuführen, daß kein Bewegungsvorgang ohne Reibung vorstellbar ist. Deshalb sind auch bisher alle Versuche fehlgeschlagen, ein sog. Perpetuum Mobile zu konstruieren, also einen Apparat, der keine Verluste durch Reibung verursacht.

Beispiele:

a) Die Hinterachse eines Pkw wird mit einer Kraft von 5 kN belastet. Mit welcher Kraft darf der Wagen anfahren, damit die Hinterräder nicht durchdrehen ($\mu_0 = 0{,}9$)?

$F_R = \mu_0 \cdot G$
$F_R = 0{,}9 \cdot 5\ \text{kN}$
$F_R = 4{,}5\ \text{kN}$

b) Welche Masse m hat ein beladener Güterwaggon, wenn er mit einer Kraft von 900 N gleichförmig bewegt wird? Die Gesamtreibungszahl μ_r beträgt 0,005 (Rollreibung).

$F_R = \mu_r \cdot m \cdot g$

$m = \dfrac{F_R}{\mu \cdot g}$

$m = \dfrac{900\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}^2}{0{,}005 \cdot 10\ \text{m}}$

$m = 18\,000\ \text{kg}$

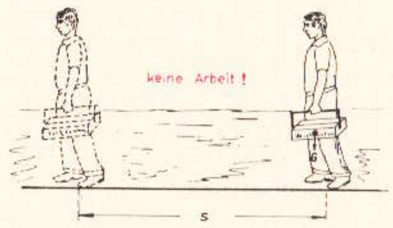
c) Wie groß ist die Reibung, wenn Stahl auf Stahl
1. trocken
2. geschmiert

bewegt werden soll und das Gewicht 100 N beträgt?

1. trockene Reibung: $F_t = \mu \cdot G$
$F_t = 0{,}15 \cdot 100\ \text{N}$
$F_t = 15\ \text{N}$

2. Reibung, geschmiert: $F_g = 0{,}03 \cdot 100\ \text{N}$
$F_g = 3\ \text{N}$

2.4.3 Arbeit



Im täglichen Leben redet man von Hausarbeit, Gartenarbeit oder Schularbeiten. Diese Arbeiten sind aber vom physikalischen her meßtechnisch überhaupt nicht zu erfassen. In der Physik spricht man von Arbeit, wenn längs eines Weges auf einen Körper eine Kraft wirkt.

Der Handwerker nebenstehender Abbildung verrichtet für den Transport des Werkzeugkastens im physikalischen Sinn **keine** Arbeit!

Ordnet man der Arbeit den Buchstaben W zu, dann gilt:

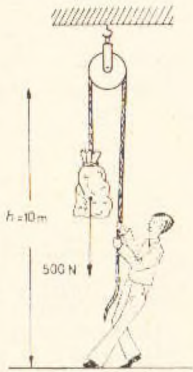
Arbeit = Kraft · Weg $\qquad W = F \cdot s$

Arbeit ist das Produkt aus der in Wegrichtung wirkenden Kraft und dem zurückgelegten Weg.

Dabei unterscheidet man zwischen:

a) **Hubarbeit**
Bei der Hubarbeit wird in die bekannte Formel anstelle der Strecke s die Höhe h eingesetzt.

$$W_H = F \cdot h$$



$W_H = G \cdot h$
$W_H = 500\ \text{N} \cdot 10\ \text{m}$
$W_H = 5000\ \text{Nm}$

Beachte: Bei einfachen Maschinen (Hebel, Flaschenzug) wird niemals Arbeit gespart! Das, was an Kraft eingespart wird, muß an Weg hinzugesetzt werden.

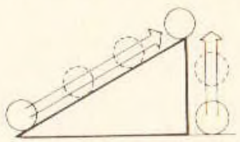
b) **Halten einer Last** (auch Tragen)
Beim Halten einer Last ist die Arbeit $W = 0$, da keine Strecke zurückgelegt wird.

c) **Reibungsarbeit**
Wird ein Pkw geschoben, dann muß nur die Rollreibung zwischen Reifen und Straße überwunden werden.

$G = 8500\ \text{N}$
$\mu = 0{,}1$

$W_R = F_R \cdot s = \mu \cdot G \cdot s =$
$W_R = 0{,}1 \cdot 8500\ \text{N} \cdot 20\ \text{m} = 17\,000\ \text{Nm}$

d) **Arbeit an der schiefen Ebene**
An der schiefen Ebene ist die Arbeit gleich dem Produkt aus Hangabtriebskraft und der Länge ℓ. Es muß genausoviel Arbeit verrichtet werden, als ob das Gewicht senkrecht hochgezogen würde. Also kann auch an der schiefen Ebene keine Arbeit eingespart werden.



$G = 150\ \text{N}$
$h = 2\ \text{m}$
$s = \ell = 4\ \text{m}$

a) **Schiefe Ebene:**

$$W = F_h \cdot \ell = G \cdot \frac{h}{\ell} \cdot \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} W = G \cdot h \\ W = G \cdot h \end{array}\right\} \text{identisch}$$

b) **Senkrecht:** $W = G \cdot h$

$W = 150\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} = 300\ \text{Nm}$

Einheiten für die Arbeit:

Aus der Formel $W = F \cdot s$ ergibt sich als Einheit für die Arbeit das Newtonmeter (Nm).

$1\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} = 1\ \text{Nm}$

Anstelle der Einheit Nm wird auch die Einheit J (Joule; sprich: dschul) verwendet.

$1\ \text{Nm} = 1\ \text{J}$

Besonders in der Elektrotechnik wird anstelle von Nm und J die gleichwertige Einheit Ws (Wattsekunde) angewandt.

$$\boxed{1\ \text{Nm} = 1\ \text{J} = 1\ \text{Ws}}$$

Beispiele:

a) Ein Pkw (10 000 N) wird 2,5 m auf einer Hebebühne angehoben. Wie groß ist die verrichtete Arbeit?

$W = F \cdot s = 10^4\ \text{N} \cdot 2{,}5\ \text{m}$
$W = 25 \cdot 10^3\ \text{N} = 25\ \text{kN} = 25\ \text{kJ}$
$W = 25\ \text{kWs} = 25 \cdot \frac{1}{3600}\ \text{kWh}$
$= 6{,}94 \cdot 10^{-3}\ \text{kWh}$

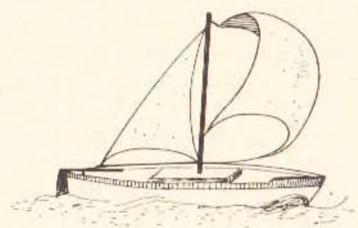
b) $F = 65\ \text{N}$; $W = 5300\ \text{Nm}$; $s = ?$

$$s = \frac{W}{F} = \frac{5300\ \text{Nm}}{65\ \text{N}} = 81{,}54\ \text{m}$$

2.4.4 Energie

Die nachfolgenden Beispiele zeigen, daß es sog. physikalische Systeme gibt, die in der Lage sind, Arbeit zu verrichten:

Durch die Muskelkraft ist der Mensch in der Lage, Lasten zu tragen, Fahrrad zu fahren, eine Schraube anzuziehen; bei all diesen Beispielen wird Arbeit verrichtet.



Ein Wagen wird durch Kraftstoff, der dem Motor zugeführt wird, bewegt.

Ein Segelboot wird durch den strömenden Wind angetrieben; es verharrt, wenn kein Wind weht.

Durch Ebbe und Flut wird das Gezeitenkraftwerk betrieben.

Eine Uhr wird durch Federkraft angetrieben; zieht man die Uhr nicht auf, so bleibt sie stehen.

Energie ist gespeicherte Arbeit

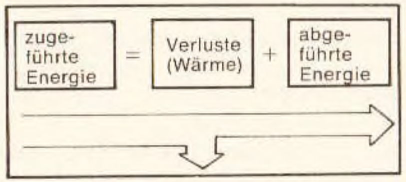
Diese Beispiele zeigen, daß durch gespeicherte Arbeit (z. B. Spannen einer Feder) wiederum eine Arbeit verrichtet werden kann. Diese Fähigkeit wird als Energie bezeichnet.

Energie ist die Fähigkeit eines physikalischen Systems, Arbeit zu verrichten.

Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt werden.

Die in der Mechanik mögliche Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, wird als mechanische Energie bezeichnet. Daneben gibt es noch andere Energieformen, wie Wärmeenergie, elektrische Energie, Lichtenergie, chemische Energie und magnetische Energie.

Energie kann niemals verlorengehen. Innerhalb eines Systems bleibt die Energie erhalten.

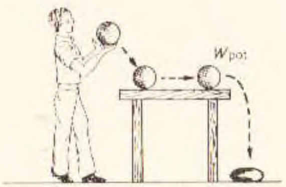


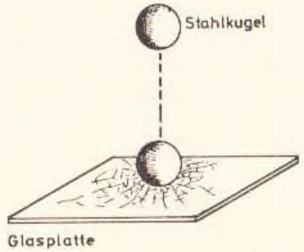
Wichtig ist, daß Energie weder vernichtet werden noch verlorengehen kann. Die Energie, die z. B. einer Batterie beim Laden zugeführt wurde, gibt sie beim Entladen fast völlig wieder ab. Es ist bekannt, daß sie sich beim Laden erwärmt – hier liegt der Unterschied zwischen aufgenommener und abgegebener Energie. Ein Teil wurde also in Wärmeenergie umgesetzt – jedoch wurde sie nicht vernichtet – sie ist im System erhalten geblieben.

In der Mechanik wird zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie unterschieden:

a) **Potentielle Energie**

Hebt man einen Bleiklumpen an und legt ihn z. B. auf einen Tisch, so befindet er sich in Ruhe. Durch das Hochheben hat er Arbeit gespeichert. Fällt er durch irgendeinen Umstand wieder herunter, so wird er sich verformen; aus der Energie der Lage, die als potentielle Energie bezeichnet wird, ist Verformungsenergie geworden.





b) **Kinetische Energie**

Immer, wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, ist er in der Lage, eine Arbeit zu verrichten. Als Beispiel wurde bereits das in dem strömenden Wind fahrende Segelboot genannt. Diese Energieart wird als Energie der Bewegung oder kinetische Energie bezeichnet.

Mechanische Energie

potentielle Energie	kinetische Energie
Energie der Lage, gespeicherte oder ruhende Energie	Energie der Bewegung
$v = 0$	$v > 0$

Grundsätzlich kann potentielle Energie in kinetische umgewandelt werden und umgekehrt. Fällt z. B. die hochgehobene Kugel eines Abbruchkranes auf ein Hausdach, so wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt.

Gesetzmäßigkeiten der Energie

Energie ist gespeicherte Arbeit, d. h., die Formeln für die Hubarbeit und die potentielle Energie müssen identisch sein.

Die Formel für die kinetische Energie kann aus der Formel für die potentielle Energie abgeleitet werden, wobei die Masse und die Fallbeschleunigung konstant bleiben und anstelle der Höhe h der Ausdruck $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$ (Fallhöhe) eingesetzt wird.

Wenn $v = g \cdot t$ gilt, dann muß auch $v^2 = g^2 \cdot t^2$ gelten.

Arbeit: $W = F \cdot s$

Hubarbeit: $W_h = G \cdot h$

Potentielle Energie: $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$

$$W_{kin} = W_{pot}$$
$$W_{kin} = m \cdot g \cdot h$$
$$W_{kin} = m \cdot g \cdot \frac{g}{2} \cdot t^2$$
$$W_{kin} = \frac{m}{2} \cdot g^2 \cdot t^2$$

Kinetische Energie: $W_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$

Wesentlich ist die Erkenntnis, daß für die Größe der Energie nicht nur die Masse, sondern hauptsächlich die Geschwindigkeit v – sie geht quadratisch in die Formel ein – verantwortlich ist.

Beispiele:

a) In Amerika muß ein Straßenfahrzeug einen Aufprall bis zu 10 km/h schadlos überstehen. Welche Energie wird dabei am Bug eines Wagens mit 1,2 Mg in Verformungsenergie (= kinetische Energie) umgewandelt?

Anmerkung: Der Bug des Fahrzeugs besteht aus elastischem Kunststoff, der nach der Deformierung wieder in die ursprüngliche Form zurückgeht.

Gegeben: $v = 10$ km/h
$m = 1{,}2$ Mg

Gesucht: W_{kin}

$$W_{kin} = \frac{m}{2} v^2$$

$$W_{kin} = \frac{1200\ \text{kg}}{2} \cdot 10^2\ \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2}$$

$$W_{kin} = 600\ \text{kg} \cdot 2{,}78^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$W_{kin} = 4637\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$W_{kin} = 4637\ \frac{\text{kgm} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 4637\ \text{Nm}$$

b) Die Notwendigkeit, auch im Stadtverkehr in Kraftfahrzeugen Sicherheitsgurte anzulegen, soll physikalisch unterstrichen werden. Dazu wird berechnet, welcher Fallhöhe ein Aufprall auf ein feststehendes Hindernis aus 50 km/h Geschwindigkeit entspricht.

Die Aufprallenergie ist kinetische Energie. Sie ist der potentiellen Energie beim Sturz aus einer bestimmten Höhe h gleich.

Gegeben: $v = 50$ km/h

Gesucht: h

$$W_{kin} = W_{pot}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

(m kann auf beiden Seiten dividiert werden und fällt weg.)

$$\frac{v^2}{2} = g \cdot h$$

Nach h umgestellt:

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$v = 50\ \text{km/h} = \frac{50000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}$$

$$v = 13{,}89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$h = \frac{13{,}89^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h = 9{,}83\ \text{m}$$

Auf einen Fahrzeuginsassen wirkt also beim Aufprall aus einer Geschwindigkeit von 50 km/h die gleiche Energie wie beim freien Fall aus 9,83 m Höhe.

2.4.5 Leistung – Wirkungsgrad

Wer leistet mehr? Beim Besteigen einer 5 m hohen Treppe wurden folgende Zeiten für die Personen A und B, die jeweils 600 N wogen, gestoppt:

Person A: 10 s   Person B: 15 s

$$\boxed{\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}}$$

Spontan würde man richtig antworten, daß die Person A mehr geleistet hat als Person B, da A für dieselbe Arbeit weniger Zeit benötigt hat. Die Leistung ist also um so größer, je geringer die Zeit ist, die für eine bestimmte Arbeit benötigt wird.

Die Leistung ist der Quotient aus der Arbeit und der dazu benötigten Zeit.

$$P = \frac{W}{t}$$

Zur Ableitung der Einheit soll die Leistung der Person A aus dem obigen Beispiel berechnet werden.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{600\ \text{N} \cdot 5\ \text{m}}{10\ \text{s}}$$
$$= 300\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

Für die Arbeit werden folgende Einheiten verwendet:

1 Nm = 1 J = 1 Ws

Aufgrund dieser Zusammenhänge ergeben sich für die Leistung die nebenstehenden Einheiten.

Leistungseinheiten:

$$\boxed{1\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1\ \text{W} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

Zwischen der seit dem 31. 12. 1977 nicht mehr zugelassenen Einheit PS für Leistung und der Einheit kW besteht der nebenstehende Zusammenhang.

1 PS = 0,736 kW   1 kW = 1,36 PS

Leistungen	
Dauerleistung eines Menschen	75 W (0,1 PS)
Höchstleistung des Menschen	2 kW (ca. 3 PS)
Leistung eines 50-PS-Motors	36,8 kW
Lokomotive	9 000 kW (12 000 PS)
Dampfkraftwerk	600 000 kW

Die nebenstehende Tabelle zeigt einige interessante Leistungsdaten zum Vergleich.

Aufgrund der neuen SI-Einheiten ist es möglich, von einer in W angegebenen elektrischen Leistung sofort auf die mechanische Leistung (Nms^{-1}) zu schließen.

Beispiele:

a) Ein Kran hebt eine Last (m = 1 200 kg) innerhalb von 30 s 25 m hoch. Wie groß ist die Leistung in kW?

$$P = \frac{mgh}{t} = \frac{1\,200 \cdot 10 \cdot 25\ \text{Nm}}{30\ \text{s}}$$

$$P = 10\,000\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 10\ \text{kW}$$

b) Ein Mensch kann eine Leistung von 2 kW erreichen. Welche Masse konnte ein Gewichtheber innerhalb von 1,5 s 2,3 m hochheben?

$$P = \frac{W}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

$$m = \frac{P \cdot t}{g \cdot h} =$$

$$m = \frac{2\,000\ \text{kgm}^2 \cdot 1{,}5\ \text{s}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^3 \cdot 2{,}3\ \text{m}}$$

$$m = \frac{3\,000\ \text{kg}}{23} = 130{,}43\ \text{kg}$$

Einheitenprobe:

$$1\ \text{kW} = 1\,000\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$= 1\,000\ \frac{\text{kgm} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{s}} = 1\,000\ \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}$$

c) Welche Leistung vollbringt ein Mensch, wenn er ein Gewichtsstück von 150 N 25 s lang hält und dabei auf der Stelle stehen bleibt?

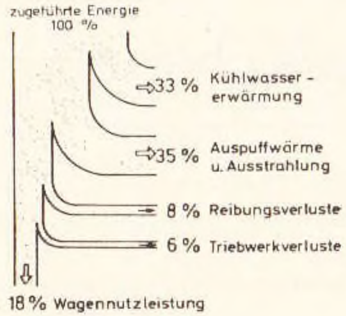
Hier wurde keine Arbeit verrichtet, da keine Strecke zurückgelegt worden ist. Ist die Arbeit 0, so muß auch die Leistung 0 sein.

d) Ein Bauarbeiter hebt mit Hilfe eines Flaschenzuges in 5 min (= 300 s) einen 1 000 N schweren Eisenträger 20 m hoch. Wie groß ist seine Leistung?

$$P = \frac{G \cdot h}{t}$$

$$P = \frac{1\,000\ \text{N} \cdot 20\ \text{m}}{300\ \text{s}}$$

$$P = \ = 66{,}67\ \text{W}$$



Eine Maschine hat die Aufgabe, Energie umzuwandeln. Dabei läßt sich die Reibung nie völlig ausschließen. Das bedeutet, daß die zugeführte Energie immer größer ist als die abgegebene (Nutzarbeit). Die Differenz zwischen zugeführter und abgeführter Energie ergibt sich größtenteils durch die Reibungsverluste, die zur Erwärmung einer Maschine führen. Beim Automotor ist die unerwünschte Erwärmung, also der Verlust, so groß, daß sogar gekühlt werden muß. Um auszudrücken, wie groß der Energieverlust in einem System ist, wird das Verhältnis aus zugeführter und abgegebener Arbeit bzw. Leistung gebildet. Diesen Quotienten bezeichnet man als Wirkungsgrad η.

Der Wirkungsgrad einer Maschine muß immer kleiner als 1 sein!

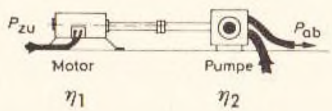
$$\eta < 1$$

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{abgegebene Arbeit}}{\text{zugeführte Arbeit}}$$

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}$$

Wird keine Energie gespeichert, so gilt auch

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$



$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

P_{zu} = elektrische Leistung

P_{ab} = mechanische Leistung

Sind in einem System mehrere Energieumwandlungen nötig, wie z. B. beim Betrieb einer Pumpe (Elektromotor, Pumpe), dann sind die Wirkungsgrade miteinander zu multiplizieren, um den Gesamtwirkungsgrad zu berechnen.

Beispiel:

Ein Elektromotor hat einen Anschlußwert von 3 kW. In einen Kran eingebaut war er in der Lage, einen Träger (1 000 N) innerhalb von 10 s 28 m hoch zu heben. Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Zugeführte Leistung: 3 kW
Nutzleistung:

$$P_{ab} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{1\,000\ \text{N} \cdot 28\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 2{,}8\ \text{kW}$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{2{,}8\ \text{kW}}{3\ \text{kW}} = 0{,}93 = 93\ \%$$

Zur Lernerfolgssicherung

- Was versteht man unter der Dichte eines Stoffes?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Masse, Volumen und Dichte eines Körpers?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Masse, Fallbeschleunigung und Gewichtskraft?
- Warum ändert sich das Gewicht eines Körpers je nach der geografischen Lage, in der das Gewicht ermittelt wird?
- Welche Wirkung übt eine Kraft auf einen frei beweglichen Körper aus?
- Wie werden Kräfte grafisch dargestellt?
- Welche Eigenschaften kennzeichnen eine Kraft?
- Wie kann die resultierende Kraft mehrerer Kräfte rechnerisch und grafisch ermittelt werden?
- Unter welcher Bedingung können Kräfte einfach linear addiert oder subtrahiert werden?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kraft, Fläche und Druck?
- Wie wirkt sich ein auf eine Flüssigkeit ausgeübter Druck richtungsmäßig aus?
- Beschreiben Sie das Prinzip der hydraulischen Presse!
- Nennen Sie die drei Gleichgewichtsbedingungen für einen Körper!
- Was versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers?
- Was versteht man unter einem Drehmoment?
- Wie unterscheiden sich einseitiger und zweiseitiger Hebel?
- Geben Sie formelmäßig und in Worten das Hebelgesetz an!
- Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Kraft und Kraftweg bzw. Last und Lastweg für eine feste und eine lose Rolle!
- Erklären Sie mit Hilfe des Hebelgesetzes die Wirkungsweise eines Flaschenzugs!
- Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Gewichtskraft, Normalkraft und Hangabtriebskraft an einer schiefen Ebene!
- Was ist kennzeichnend für eine gleichförmige bzw. für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung?
- Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Größen Weg, Zeit und Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung!

- Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Weg, Zeit, Beschleunigung und Geschwindigkeit bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung!
- Warum fällt im Vakuum eine Daunenfeder genauso schnell zu Boden wie ein Bleiklumpen?
- Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Masse, Beschleunigung und Kraft!
- Von welchen Einflußgrößen hängt die Reibungskraft ab?
- Ordnen Sie die Größen Gleitreibung, Haftreibung und Rollreibung nach steigenden Werten, bezogen auf gleiches Gewicht und gleiche Materialien!
- Was besagt das physikalische Gesetz der Energieerhaltung?
- Was versteht man physikalisch unter Arbeit?
- Warum ist das ebenerdige Forttragen von Gegenständen keine Arbeit im physikalischen Sinne?
- Warum gibt es kein Perpetuum Mobile?
- Beschreiben Sie die Größen potentielle Energie und kinetische Energie!
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Größen Leistung, Zeit und Arbeit?
- Was versteht man unter dem Wirkungsgrad einer Maschine?

3 Akustik

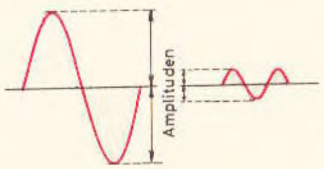
3.1 Schwingungen und Wellen

Eine Schwingung ist die periodische hin- und hergehende Bewegung eines Körpers.

Wird ein elastischer Körper angestoßen, so führt er periodische mechanische Schwingungen aus. Periodisch bedeutet, daß für jede ohne äußeren Einfluß auftretende weitere Schwingung der gleiche Zeitabschnitt benötigt wird.

Die Schwingungszahl je Sekunde wird als Frequenz bezeichnet.

Die Schwingungszahl in der Zeiteinheit hängt u. a. von den Abmessungen und der Elastizität des schwingenden Körpers ab.



Der Abstand zwischen Höchstwert bzw. Tiefstwert und Nullachse wird **Amplitude** genannt. Die Größe der Amplitude ist für die Lautstärke verantwortlich.

Die für den Ablauf einer Schwingung benötigte Zeit wird als **Schwingungsdauer** bezeichnet.

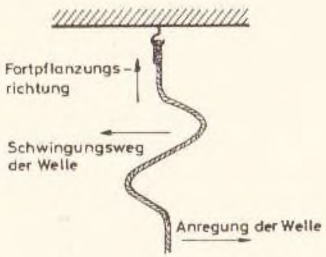
Eine Welle ist die Ausbreitungsform einer Schwingung.

Mechanische Schwingungen können sich in festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen in Form von Wellen ausbreiten.

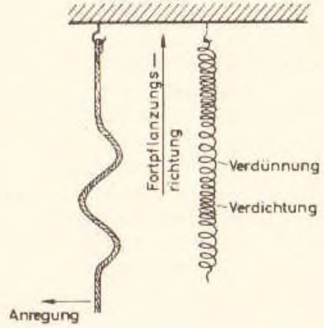
Es wird grundsätzlich zwischen Quer- und Längswellen unterschieden:

a) **Querwellen**

Ein Modell der Querwelle erhält man, indem ein Seil an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende hin und her bewegt wird. Dabei wird festgestellt, daß die Wellenbewegung schnell über das Seil hinwegwandert und alle Teile senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen.



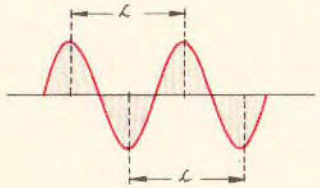
In der Natur findet man solche Quer- und Transversalwellen als Lichtwellen, Wasserwellen und Schallwellen in festen Körpern.



b) **Längswellen**

Bringt man eine an beiden Seiten fest eingespannte Schraubenfeder zum Schwingen, dann treten innerhalb der Feder Verdichtungen und Verdünnungen auf. Solche Wellen werden Längs- oder Longitudinalwellen genannt. Solche Längswellen findet man bei der Schallausbreitung in der Luft vor.

Für Längs- und Querwellen gelten dieselben Gesetzmäßigkeiten.



Die **Wellenlänge** ist die Entfernung von zwei aufeinanderfolgenden Höchstwerten oder Tiefstwerten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Höchst- bzw. Tiefstwert fortpflanzt. Vergleicht man die Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der allgemeinen Geschwindigkeitsformel $v = \frac{s}{t}$, so ergeben sich folgende Gegenüberstellungen:

Geschwindigkeit: $v \ldots c$
Strecke: $s \ldots \lambda$
Zeit: $t \ldots T$

Damit ergibt sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

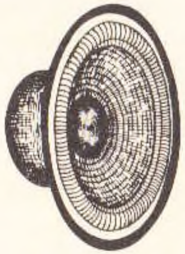
Setzt man schließlich anstelle der Periodendauer T deren Zusammenhang mit der Frequenz ($T = \frac{1}{f}$) ein, dann ergibt sich die nebenstehende zweite Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

$$c = \lambda \cdot f$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen spielt auch die Art des Stoffs eine Rolle, in dem sich die Welle fortpflanzt. Die nebenstehende Tabelle zeigt die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Medien. Im Vakuum kann der Schall sich nicht ausbreiten — es fehlt das Medium.

Stoff	c
Luft	333 m/s
Glas	bis 5300 m/s
Wasser	1480 m/s
Kupfer	3900 m/s
Kautschuk	35 m/s

3.2 Schall

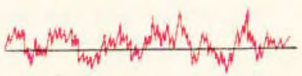


Schallwellen gehen von einem Körper aus, der in mechanische Schwingungen versetzt wurde. Das menschliche Ohr nimmt in der Regel die Frequenzen von 16–20 000 Hz wahr. Alle Frequenzen, die höher liegen, werden als Ultraschall, alle darunterliegenden als Infraschall bezeichnet.

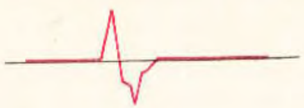
Je nach Klangform unterscheidet man zwischen Ton, Klang, Geräusch und Knall:

a) **Ton**
Ein Ton ist durch eine reine Sinusschwingung gekennzeichnet. Wichtig für die Musik ist der sog. Kammerton a mit einer Frequenz von 440 Hz. Nach diesem Ton werden alle Musikinstrumente gestimmt.

b) **Klang**
Eine Geige und eine Trompete haben bei gleichem Ton einen verschiedenen Klang. Jede menschliche Stimme ist trotz gleicher Tonlage verschieden. Diese Beispiele zeigen, daß Instrumente und Stimmen ihre „Eigenarten" haben. Der Klang wird durch sog. Oberwellen bestimmt. Dem eigentlichen Ton sind Oberwellen überlagert, die ein Vielfaches der Grundfrequenz darstellen.

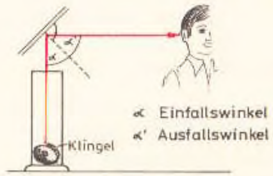


c) **Geräusch**
Ein Geräusch, das z. B. beim Anritzen mit einer Reißnadel entsteht, ist eine unregelmäßige Schwingung.

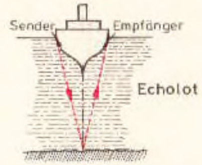


d) **Knall**
Ein Knall ist ein starkes Geräusch von kurzer Dauer.

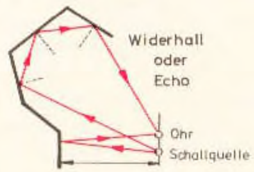
3.2.1 Schallausbreitung



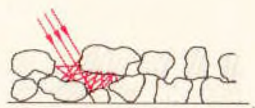
Treffen Schallwellen auf eine elastische Wand, dann werden sie reflektiert. Dabei sind Einfalls- und Ausfallswinkel gleich groß. Diese Erscheinung macht man sich beim Echolot zunutze. Die Zeit, die der Schall vom Senden bis zum Empfang benötigt, ist ein Maß für die Meerestiefe.



Die Schallreflexion führt unter bestimmten Voraussetzungen zum sog. Echo. Nach einigen Reflexionen trifft der Schall wieder auf die Schallquelle – wir hören so z. B. die Wiederholung unseres gesprochenen Wortes.

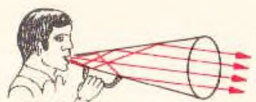


Soll der Schall gedämpft werden, dann muß ein Raum mit porösem und weichem Material ausgekleidet werden. Der Schall „läuft sich tot", da innerhalb dieser Materialien (Styropor, Watte, Schaumstoff) eine Vielzahl von Hohlräumen vorhanden sind.



Schallwellen „laufen sich tot"

Eine weitere Anwendung ist das Sprachrohr. Durch Reflexion des Schalls an den Wänden wird eine Bündelung des Schalls erzeugt, so daß größere Entfernungen überbrückt werden können.



Sprachrohr

Der Schall wird an einer elastischen Wand reflektiert.
Poröse und weiche Materialien eignen sich zur Schalldämpfung.

Beispiel:

Vom Echolot eines Schiffes wurde die Zeit t = 80 ms gemessen (Schiffsrumpf–Meeresboden und zurück). Wie tief war das Fahrwasser (c = 1480 m/s)?

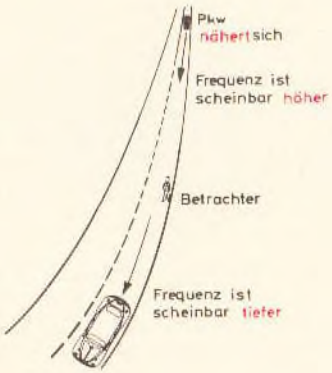
$$c = \frac{2\,s}{t} \quad \rightarrow s = \frac{c \cdot t}{2}$$

Doppelte Strecke!

$$s = \frac{1480\ \text{m} \cdot 0{,}08\ \text{s}}{\text{s}\ 2}$$

$$s = 59{,}2\ \text{m}$$

3.2.2 Doppler-Effekt



Beim Herannahen und Entfernen eines Autos mit relativ großer Geschwindigkeit wurde folgende Beobachtung gemacht:

Die vom Pkw abgestrahlte Frequenz scheint mit dem Näherkommen des Fahrzeugs höher als die Eigenfrequenz zu sein. Entfernt sich das Fahrzeug, dann nimmt die Frequenz ab.

Diese Erscheinung wird als Doppler-Effekt bezeichnet.

Geringere Wellenlänge hat eine Frequenzerhöhung zur Folge.

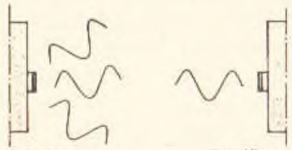
Wie kommt es nun zu dieser Erscheinung? Bewegt sich das Fahrzeug auf den Betrachter zu, dann bewirkt das eine Verkürzung der Wellenlänge um den Weg, den der Pkw während der Dauer einer Schwingung zurücklegt.

Größere Wellenlänge hat eine Frequenzverringerung zur Folge.

Entfernt sich dagegen der Wagen vom Betrachter, so entspricht dies einer Vergrößerung der Wellenlänge um den Weg, den der Pkw während der Dauer einer Schwingung zurücklegt.

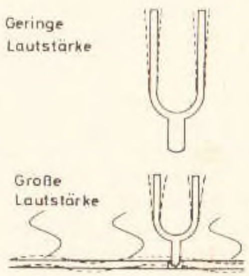
Diese Erscheinung ist natürlich am deutlichsten, wenn die Geschwindigkeit der Schallquelle besonders groß ist.

Den Doppler-Effekt macht man sich auch bei Alarmanlagen zunutze.



In einem Raum befindet sich eine Ultraschallquelle sowie ein auf deren Frequenz geeichter Empfänger. Bewegt sich jemand in diesem Raum, so ändert sich die Frequenz der von seinem Körper reflektierten Schallwellen. Die Frequenzänderung löst ein Signal aus.

3.2.3 Mitschwingen – Resonanz



Nachdem eine Stimmgabel angeschlagen wurde, wird sie auf eine Tischplatte gesetzt. Dabei ist eine deutliche Lautstärkeerhöhung zu vernehmen. Nimmt man jetzt eine zweite Stimmgabel und stellt sie ebenfalls auf die Platte, dann wird auch sie anfangen zu schwingen, wenn sie auf die gleiche Frequenz geeicht ist.

Bei Streichinstrumenten regt die schwingende Saite den Hohlkörper zum Schwingen an, wodurch ein deutlich vernehmbarer Ton entsteht.

Sind die Eigenfrequenzen zweier Stimmgabeln geringfügig unterschiedlich, dann schwingt die zweite mit einer anderen als ihrer Resonanzfrequenz, jedoch mit einer wesentlich geringeren Amplitude.

Wie lassen sich nun diese Erscheinungen erklären? – Beim Anschlagen einer Stimmgabel werden nur die in unmittelbarer Nähe befindlichen Luftpartikel zum Mitschwingen gebracht. Stellt man dagegen die Stimmgabel auf den Tisch, so wird dessen Platte zum Mitschwingen angeregt. Diese Schwingungen bringen weitaus mehr Luftteilchen zum Schwingen – wir hören den Ton intensiver. Die zweite Stimmgabel wird durch die unmittelbare Berührung mit der Tischplatte zum Schwingen angeregt.

Mitschwingen tritt bei direkter Kopplung zwischen einem schwingenden und einem schwingungsfähigen Körper auf.

Vom Mitschwingen unterscheidet sich die Resonanz dadurch, daß keine direkte Kopplung vorliegen muß, sondern die Übertragung z. B. nur durch die Luft geschieht.

Am 07. 11. 1940 ist in Ohio (USA) die Tacoma-Brücke durch Resonanz zerstört worden.

Bei Resonanz können durch Überlagerung Schwingungen mit sehr großen Amplituden entstehen. Bringt man Gegenstände in Resonanz, so können sie zerstört werden.

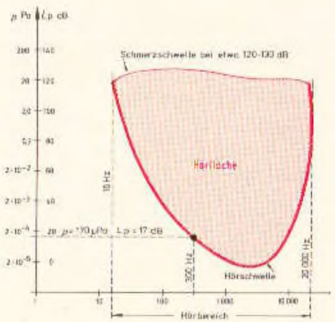
3.3 Hören/Hörbereich

Das menschliche Ohr kann Frequenzen von 16...20 000 Hz wahrnehmen.

Gegenüber Tonhöhenschwankungen ist das Ohr sehr empfindlich. Deshalb müssen hochwertige akustische Aufnahme- und Wiedergabegeräte mit hohem regeltechnischen Aufwand hergestellt werden (Gleichlaufgenauigkeit eines Hi-Fi-Plattenspielers muß kleiner als 0,3 % sein, da wir größere Abweichungen wahrnehmen würden).

Hi-Fi-Norm DIN 45 500

Dagegen nimmt das menschliche Ohr Schalldruckschwankungen nicht so eindringlich wahr. Das Ohr besitzt nämlich ein logarithmisches Lautstärke-Hörvermögen, d. h. zunächst eine stark und mit zunehmendem Schalldruck eine geringer wachsende Lautstärkeempfindung. Aufgrund dieser Tatsache sind alle Lautstärkeeinsteller logarithmische Potentiometer.



Die Hörfähigkeit des Ohres ist nicht nur abhängig von dem erzeugten Schalldruck, sondern auch von der Frequenz. Die nebenstehende Abbildung zeigt, daß wir bestimmte Frequenzen erst bei einem bestimmten Schalldruck wahrnehmen (Hörgrenze). Die obere Linie zeigt die Schmerzschwelle, bei der die Hörempfindung schmerzhaft wird. Der Mensch muß sich durch geeignete Maßnahmen dagegen schützen. Die Kurve zeigt deutlich, daß das Ohr die größte Empfindlichkeit zwischen 1 000 Hz und 3 000 Hz besitzt.

3.3.1 Schalldruck p – Schalldruckpegel Lp

Die Kraft, mit der Schall auf eine Fläche von 1 m² wirkt, wird als Schalldruck bezeichnet und in N/m² = Pa (Pascal) angegeben.

Der Schalldruck p wird in N/m² = Pa angegeben.

Da die Lautstärkeempfindung des menschlichen Ohres jedoch nicht linear, sondern annähernd logarithmisch mit dem Schalldruck zunimmt, verwendet man häufig den Begriff Schalldruckpegel.

Beim Schalldruckpegel wird die logarithmische Lautstärkeempfindung des menschlichen Ohres berücksichtigt. Die Einheit des Schalldruckpegels ist dB (Dezibel).

Steigt der Schalldruck von geringen Werten an, so wächst die Lautstärkeempfindung zunächst noch relativ stark, mit weiter zunehmendem Schalldruck jedoch immer weniger.

Mit jeder Schalldruckerhöhung auf den zehnfachen Wert erhöht sich der Schalldruckpegel um 20 dB. Ein Vergleich ist nach nebenstehender Tabelle möglich.

Schallquelle	Schalldruckpegel in dB	Schalldruck in Pa
Hörschwelle, Bezugswert für den Schalldruckpegel	0	$2 \cdot 10^{-5}$
Leises Flüstern in 3 m Abstand, Blätterrauschen	10	$6 \cdot 10^{-5}$
Feiner Landregen, Uhrenticken	20	0,0002
Normales Flüstern in 1 m Abstand	30	0,0006
Zerreißen von Papier in 1 m Abstand, leise Unterhaltungssprache	40	0,002
Unterhaltungssprache in 1 m Abstand, Schreibmaschinenlärm	50	0,006
Lautsprecher in Zimmerlautstärke in 1 m Abstand, laute Unterhaltung	60	0,02
Lautes Gespräch in 1 m Abstand, Straßenlärm	70	0,06
Lautes Rufen in 1 m Abstand, Autohupen, starker Straßenlärm	80	0,2
Autohupe in 1 m Abstand, Preßluftbohrer, Kreissäge	90	0,6
Automotor ohne Schalldämpfer in 3 m Abstand, Niethammer	100	2,0
Starktonhorn und Flugzeugmotor in 6 m Abstand	110	6
Flugzeugmotor in 3 m Abstand, Düsentriebwerk in unmittelbarer Nähe	120	20
Schmerzschwelle	130	60

Zur Lernerfolgssicherung

- Was versteht man unter einer Schwingung?
- In welchen Wellenformen können sich Schallwellen in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern ausbreiten?
- Skizzieren Sie eine sinusförmige Schwingung, und kennzeichnen Sie die Größen Amplitude und Periodendauer!
- Was versteht man unter der Wellenlänge einer Schwingung?
- Geben Sie den Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge einer Schwingung an!
- Was hat den größten Einfluß auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen?
- Was ist Schall?
- Geben Sie den Unterschied zwischen Ton, Klang und Geräusch an!
- Welche Eigenschaft von Schallwellen wird beim Echolot ausgenutzt?
- Wie kann Schall gedämpft werden?
- Unter welchen Voraussetzungen kommt es beim Auftreffen von Schallwellen auf einen Körper zur Resonanz?
- Wie groß ist der größtmögliche Hörbereich des menschlichen Ohres?
- Beschreiben Sie, wie die Lautstärkeempfindung des menschlichen Ohres vom Schalldruck (Schalldruckpegel) abhängt!
- Für welche Tonfrequenzen ist das menschliche Ohr am empfindlichsten?

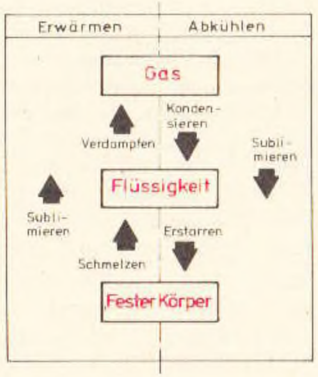
4 Wärmelehre

4.1 Kinetische Wärmetheorie

Durch zunehmende Erwärmung geraten die Moleküle von Stoffen in größer werdende Schwingungen. Diese Molekularbewegung ist maßgebend für die erkennbaren und meßbaren Wirkungen der Wärmeenergie:

Grundsätzlich können Stoffe in den sog. Aggregatzuständen
fest,
flüssig und
gasförmig
vorkommen.

- Sämtliche Moleküle in Ruhe = **absoluter Nullpunkt** = 0 K.
- Steigende Wärmeenergie-Zufuhr bedeutet Zunahme der Molekularbewegung = **Zunahme der Temperatur.**
- Die mit zunehmender Energiezufuhr größer werdende Schwingungsweite der Moleküle kann schließlich dazu führen, daß ein **fester Stoff** in den **flüssigen Zustand** bzw. ein flüssiger Stoff in den dampfförmigen = **gasförmigen Zustand** übergeht.



Es läßt sich unschwer ableiten, daß die mit der Energiezufuhr steigende Schwingungsweite der Moleküle zu einer **Ausdehnung** der Materie in allen drei Dimensionen führt.

Geht ein Stoff (z. B. Schwefel) direkt vom gasförmigen in den festen Zustand über, dann nennt man das sublimieren.

Ähnliches spielt sich auch beim Verdunsten von Wasser ab. Obwohl die Lufttemperatur sehr gering ist, verdunstet das Wasser — ja sogar an Eisoberflächen.

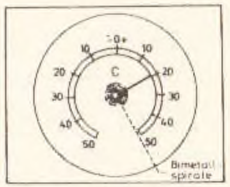
Getränke in Tongefäßen sind immer angenehm kühl – durch die feinen Poren im Ton tritt die Flüssigkeit nach außen und verdunstet dort. Dabei wird der Umgebung – also dem gefüllten Gefäß – Wärme entzogen. Der Inhalt bleibt kühl.

Geht ein Stoff von einem Aggregatzustand in einen anderen über, so wird immer Wärme benötigt (fest → flüssig → gasförmig) bzw. Wärme abgegeben (gasförmig → flüssig → fest). Wenn es besonders warm ist, dann fangen wir an zu schwitzen. Der Schweiß verdunstet, wobei dem Körper Wärme entzogen wird – unsere Haut kühlt ab.

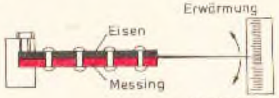
4.2 Temperatur – Temperaturmessung

Technisches:

Die meisten Thermometer arbeiten mit Quecksilber. Da es aber bereits bei −39 °C erstarrt, ist es zur Messung tiefer Temperaturen ungeeignet. Meist werden dann Alkoholthermometer eingesetzt (Meßbereich: −70 °C bis +60 °C). Zur Messung sehr hoher und tiefer Temperaturen verwendet man elektrische oder optische Verfahren.



In der Technik findet man häufig das Bimetallthermometer, bei dem die unterschiedliche Wärmedehnung verschiedener Metalle zur Temperaturmessung ausgenutzt wird.

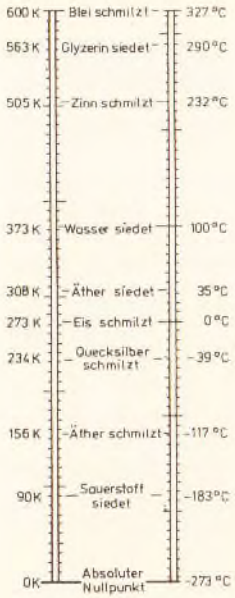


Bimetall – Messing dehnt sich bei Erwärmung stärker aus als Eisen.

Der Mensch kann zwischen heiß, kalt und lau unterscheiden. Sein Temperatursinn vermag jedoch nicht festzustellen, welche Temperatur ein Körper angenommen hat. Wir haben nur ein „relatives" Temperaturempfinden. Betreten wir im Sommer einen klimatisierten Raum, empfinden wir eine angenehme Kühle – im Winter dagegen dieselbe Raumtemperatur als wohlige Wärme.

Um die Temperatur eines Körpers zu bestimmen, verwendet man Thermometer. Die Funktion dieser Geräte basiert z. B. auf der Ausdehnung von Stoffen bei der Temperaturerhöhung und deren Zusammenziehung bei Temperaturverringerung.

Da sich der elektrische Widerstand der meisten Leiter- und Halbleiterwerkstoffe mit der Temperatur ändert, läßt sich die temperaturabhängige Widerstandsänderung zur elektrischen Temperaturmessung ausnutzen.



Gegenüberstellung von Kelvin- und Celsiusskala

Thermometer mit Celsiusskala

Im täglichen Gebrauch wird mit der sog. Celsiusskala gearbeitet, deren Fixpunkte der Eispunkt (0 °C) und der Siedepunkt des Wassers (100 °C) sind. Mit der Einführung der SI-Einheiten hat die Temperaturskala nach Kelvin Einzug in die Physik gehalten. Hier sind die Fixpunkte:

0 K entsprechen −273 °C

273 K entsprechen 0 °C

Die Temperaturdifferenz 1 °C entspricht also genau 1 K. Bei Temperaturdifferenzen ist es demnach belanglos, ob nach der einen oder der anderen Skala gerechnet wird.

4.3 Wärme als Energie

4.3.1 Wärmemenge

Wärme ist Energie!

Um 1 kg Wasser von 14,5 auf 15,5 °C zu erwärmen, ist eine Wärmemenge von 4186,8 J erforderlich. Also etwa 4,2 kJ.

Wird einem Stoff Wärme zugeführt, dann erhöht sich dadurch die Bewegungsenergie seiner Moleküle. Wärme ist also eine Energieform (Arbeit). Um die Wärmeenergie zu messen, wird die aus der Mechanik bekannte **Einheit Joule (J)** verwendet. Es gilt die nebenstehende Definition.

(Alte, nicht mehr zugelassene Einheit: kcal. 1 kcal = 4,2 kJ)

$$\Delta\vartheta = 1\,°C \begin{cases} \text{bei } 2\,l \ldots 2 \cdot 4{,}2\,kJ = 8{,}4\,kJ \\ \text{bei } 5\,l \ldots 5 \cdot 4{,}2\,kJ = 21\,kJ \end{cases}$$

Die zur Temperaturerhöhung um 1 °C erforderliche Wärmemenge muß sich bei 2 l verdoppeln, bei 5 l verfünffachen usw.

$$m = 1\,kg \begin{cases} \text{bei } \Delta\vartheta = 2\,°C \ldots 2 \cdot 4{,}2\,kJ = 8{,}4\,kJ \\ \text{bei } \Delta\vartheta = 5\,°C \ldots 5 \cdot 4{,}2\,kJ = 21\,kJ \end{cases}$$

Bei 2 °C Temperaturerhöhung muß sich die Wärmemenge verdoppeln und bei 5 °C ebenfalls verfünffachen.

$$\boxed{Q = 4{,}2 \cdot m \cdot \Delta\vartheta}$$

Wird die zugeführte Wärmemenge mit Q bezeichnet, so gilt demnach für Wasser die nebenstehende Formel.

Spez. Wärmekapazität (Artwärme) in $\frac{kJ}{kg \cdot K}$ bzw. $\frac{kJ}{kg \cdot °C}$			
Wasser	4,19	Eis	2,09
Glycerin	2,43	Eisen	0,45
Alkohol	2,43	Aluminium	0,90
Quecksilber	0,14	Kupfer	0,38
Luft	1,00	Stein, Glas	0,84

Mit °C:	$Q = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$
Mit K:	$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$

Anwendung: Nachtspeicherofen

Im Nachtspeicherofen befinden sich Platten mit hoher spezifischer Wärmekapazität. Diese Platten werden nachts mit billigem Strom erwärmt und geben die gespeicherte Wärme tagsüber unter Zuhilfenahme eines Gebläses an den Wohnraum ab.

Beispiele:

a) Welche Wärmemenge ist notwendig, um 10 kg Wasser von 15 °C auf 95 °C zu erwärmen?

b) Welche Wärmemenge nimmt ein 10-kg-Stahlstück auf, wenn es von 15 °C auf 95 °C erhitzt werden soll?

c) Wieviel Joule sind erforderlich, um einen Lötkolben aus Kupfer von 300 g Gewicht von 20 °C auf 320 °C zu erwärmen?

Die Wärmemenge, die zum Erwärmen einer bestimmten Masse erforderlich ist, hängt in sehr starkem Maße von der Art des Stoffes ab.

Steinplatten erwärmen sich z. B. im Sommer stärker als Grasflächen. Deshalb wurde jedem Stoff eine spezifische Wärmekapazität zugeordnet, die Auskunft darüber gibt, wieviel kJ pro kg Stoffmenge erforderlich ist, um ihn um ein Grad zu erwärmen.

Schließlich kann die allgemeingültige Formel für die zugeführte Wärmemenge für einen bestimmten Stoff bei beliebiger Temperaturerhöhung und Masse angegeben werden.

Beachte: Die spezifische Wärmekapazität gibt auch Auskunft darüber, wie gut ein Stoff die Wärme speichern kann. Denn die Wärme, die dem Stoff zugeführt wurde, wird beim Abkühlen wieder abgegeben. Es fällt auf, daß Wasser ein besonders guter Wärmespeicher ist. Wasser regelt bekanntlich den Temperaturhaushalt der Erde.

c von Wasser $= 4{,}187 \frac{kJ}{kg\ °C}$

$$Q = m \cdot c\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$
$$Q = 10 \cdot 4{,}187\ (95 - 15)$$
$$Q = 10 \cdot 4{,}187 \cdot 80$$
$$Q = 3349{,}6\ kJ$$

c von Stahl $= 0{,}46057 \frac{kJ}{kg\ °C}$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta \vartheta$$
$$Q = 10 \cdot 0{,}46057 \cdot 80$$
$$Q = 368{,}456\ kJ$$

c von Kupfer $= 0{,}3894 \frac{kJ}{kg\ °C}$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta \vartheta$$
$$Q = 0{,}3 \cdot 0{,}3894 \cdot 300$$
$$Q = 35\ kJ$$

Beim letzten Beispiel wird die Beziehung zur elektrischen Arbeit deutlich. Würde man noch die Zeit berücksichtigen, dann könnte man von Wärmeleistung sprechen. Wird z. B. innerhalb von 6 min. (= 0,1 h) 1 kg Wasser von 15 °C zum Kochen gebracht, so läßt sich die Wärmeleistung und damit auch die Leistung der Kochplatte angeben.

Hier gilt:

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \frac{20\ °C + 40\ °C}{2} = 30\ °C$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 \\ m_1 \cdot c_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_m) &= m_2 \cdot c_2 \cdot (\vartheta_m - \vartheta_2) \\ \vartheta_m &= \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta_2 + m_1 \cdot c_1 \cdot \vartheta_1}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2} \end{aligned}}$$

Bei der Mischung gleicher Stoffe:

$$\vartheta_m = \frac{m_2 \cdot \vartheta_2 + m_1 \cdot \vartheta_1}{m_1 + m_2}$$

Beispiele:

a) 5 kg Wasser von 20 °C werden mit 7 kg von 50 °C gemischt. Welche Mischungstemperatur stellt sich ein?

b) Zur Bestimmung der Temperatur einer Bunsenbrennerflamme wurde ein 5 g schweres Eisenstück erwärmt und anschließend in 100 g Wasser mit einer Temperatur von 20 °C getaucht. Dabei stellte sich eine Temperatur von 24 °C ein. Welche Temperatur hatte der Bunsenbrenner?

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{c \cdot m \cdot \Delta \vartheta}{t}$$
$$P = \frac{4{,}2 \cdot 1 \cdot 85}{0{,}1}\ \frac{kJ}{h}$$
$$P = 3570\ \frac{kJ}{h}$$

Heißes und kaltes Wasser wird z. B. gemischt, um die richtige Bade- oder Duschwassertemperatur zu erhalten. Dabei gilt der folgende Grundsatz:

Beim Mischen gibt der wärmere Körper so lange Wärme an den kälteren ab, bis beide die gleiche Temperatur haben. Die abgegebene Wärmemenge ist also gleich der aufgenommenen Wärmemenge.

$$Q_1 = Q_2$$

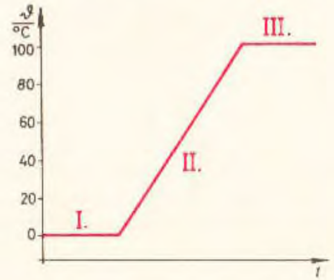
Werden zwei gleiche Mengen mit verschiedenen Temperaturen gemischt, so ist die Berechnung der Mischungstemperatur denkbar einfach. Es braucht nur der Mittelwert beider Temperaturen bestimmt zu werden.

Auch bei unterschiedlichen Mengen kann die Mischungstemperatur berechnet werden. Da abgegebene und aufgenommene Wärmemengen gleich sind, kann die Mischungstemperatur wie nebenstehend abgeleitet werden. Diese Formel hat auch dann Gültigkeit, wenn z. B. Wasser mit einem anderen Stoff gemischt wird. Werden gleiche Stoffe gemischt, dann kann das c aus der Formel herausgekürzt werden ($c_1 = c_2 = c$).

$$\vartheta_m = \frac{5 \cdot 20 + 7 \cdot 50}{5 + 7}\ °C = 37{,}5\ °C$$

$$0{,}005 \cdot 0{,}45 \cdot \vartheta = 0{,}1 \cdot 4{,}2 \cdot 4 + 0{,}005 \cdot 0{,}45 \cdot 24$$
$$0{,}00225\ \vartheta = 1{,}68 + 0{,}054$$
$$0{,}00225\ \vartheta = 1{,}734$$
$$\vartheta = \frac{1{,}734}{0{,}00225} = 770{,}7\ °C$$

4.3.2 Schmelz- und Verdampfungswärme



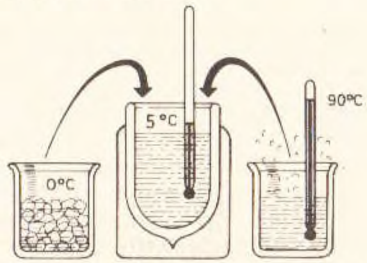
Wird einem Stoff gleichmäßig Wärme zugeführt, kann folgendes beobachtet werden (Beispiel: Wasser):

I. Um das Eis zum Schmelzen zu bringen, wird eine erhebliche Zeit benötigt. Die Temperatur steigt nicht an, bevor alles Eis geschmolzen ist. Die zugeführte Wärme wird als Schmelzwärme bezeichnet.

II. Nachdem das Eis geschmolzen ist, steigt die Temperatur gleichmäßig an, bis schließlich die Siedetemperatur erreicht ist.

III. Ein Ansteigen der Temperatur über 100 °C ist nicht eher zu beobachten, bis alles Wasser verdampft ist. Die zugeführte Wärme nennt man Verdampfungswärme. Es ist deshalb sinnlos, Wasser mit einer höheren Schaltstufe auf einem Elektroherd kochen zu lassen als notwendig. Bei der höchsten Schalterstellung verdampft das Wasser nur schneller.

Versuch zur Ermittlung der spezifischen Schmelzwärme des Eises:



Nachdem alles Eis geschmolzen ist, hat sich eine Mischungstemperatur von 5 °C eingestellt. Dabei hat jedes Gramm des heißen Wassers – es fand eine Temperaturabsenkung von 85 °C statt – $85 \cdot 4{,}1868$ J = 355,9 J abgegeben. Davon wurden zum Erwärmen von 1 g Schmelzwasser auf 5 °C nur $5 \cdot 4{,}1868$ J = 20,9 J verbraucht. Die Differenz beider Wärmemengen, es sind 335 J, wurde dabei zum Schmelzen des Eises benötigt. – Bei einem Kilogramm Eis wären es 335 kJ.

Soll Wasserdampf zu Eis werden, dann verläuft der ganze Vorgang rückwärts. Nur daß in diesem Fall die Wärme entzogen werden muß und dabei genau die Wärme frei wird, die zum Schmelzen aufgewendet wurde.

Zum **Schmelzen** von 1 kg Eis werden 335 kJ benötigt. Die spezifische Schmelzwärme beträgt demnach 335 $\frac{kJ}{kg}$.

Zum **Verdampfen** von 1 kg Wasser werden 2227 kJ benötigt. Die spezifische Verdampfungswärme beträgt also 2227 $\frac{kJ}{kg}$.

Schmelzwärme in kJ/kg			
Blei	25,1	Kupfer	205,2
Quecksilber	12,5	Eisen	268
Aluminium	401,9	Eis	335

Die nebenstehende Tabelle zeigt die Schmelzwärme einiger Stoffe.

Werden für einen Stoff die Werte für spezifische Wärmekapazität, Schmelzwärme und Verdampfungswärme verglichen, so zeigt sich, daß zur Überführung in einen anderen Aggregatzustand erheblich größere Energiemengen erforderlich sind bzw. frei werden als zur Erwärmung oder Abkühlung um 1 °C.

Beispiel Wasser:

– spez. Wärmekapazität 4,2 $\frac{kJ}{kg}$

– Schmelzwärme 335 $\frac{kJ}{kg}$

– Verdampfungswärme 2227 $\frac{kJ}{kg}$

Aus diesen Erkenntnissen lassen sich auch einige Naturerscheinungen erklären:

In der Nähe von großen Gewässern herrscht ein ausgeglichenes Klima (Seeklima). Das reine Landklima ist durch starke Temperaturunterschiede gekennzeichnet.

– Frieren im Winter Flüsse und Seen zu, dann wird Erstarrungswärme frei. Diese Wärme bewirkt, daß die Temperaturen nicht schlagartig fallen. Beim Schmelzen des Eises wird Wärme verbraucht, so daß sich die Luft nur langsam erwärmt.

Wasser als Frostschutzmittel für Pflanzen!

– Empfindliche Pflanzen werden bei starken Nachtfrösten mit Wasser bespritzt. Wenn die Temperatur unter 0 °C fällt, dann muß zuerst das auf den Pflanzen befindliche Wasser gefrieren, bevor der Frost in die Pflanze eindringt. Dazu ist aber eine große Wärmemenge (Kälte) notwendig.

Eiswürfel halten Getränke angenehm kühl!

– Im Sommer hält man Getränke durch Eiswürfel lange kühl bzw. kühlt sie dadurch ab. Bedenkt man, daß 1 g Eis 80 g Flüssigkeit um 1 °C abkühlen kann, dann leuchtet die Wirkung von ein paar Eisstücken ein.

Gehen feste Stoffe mit Flüssigkeiten eine Lösung ein, so entziehen sie ihr Wärme. Diese Wärme wird als Lösungswärme bezeichnet.

Eine ähnliche Beobachtung wird gemacht, wenn Salz in einer Flüssigkeit aufgelöst wird. Nach dem Auflösen ist die Temperatur um ein paar Grad abgesunken. Das Salz entzieht seiner Umgebung für den Lösungsvorgang Wärme; die Temperatur sinkt ab.

Damen in einem Eiscafé. Nach einem französischen Stich aus dem Jahre 1800

Bereits vor ca. 200 Jahren wurde Speiseeis gegessen. Wie war das ohne die uns bekannten Kältemaschinen möglich? Wie wurden also die dazu nötigen tiefen Temperaturen erzeugt?

Werden drei Teile fein zerstoßenes Eis mit einem Teil Salz vermischt, dann sinkt die Temperatur auf ca. −20 °C ab, und die Mischung verflüssigt sich. Wie kommt es nun zu dieser Erscheinung?

Aus Erfahrung weiß man, daß Lösungen einen wesentlich tieferen Gefrierpunkt haben als reine Flüssigkeiten. Diese Beobachtung wird auch beim Salzstreuen auf unseren Straßen im Winter beobachtet. Das Eis wird flüssig.

Die tiefere Temperatur entsteht durch das Zusammenwirken zweier Vorgänge:

1. Das Eis wird flüssig. Dabei entzieht es seiner Umgebung Wärme.
2. Das Salz geht in Lösung — auch bei diesem Vorgang wird der Umgebung Wärme entzogen.

Die Umgebung kühlt — in diesem Fall die Mischung selbst — auf −20 °C ab.

Andere Kältemischungen:

— Gleiche Teile Kaliumchlorid und Eis.

— Zwei Gewichtsteile Eis und drei Gewichtsteile Calziumchlorid.

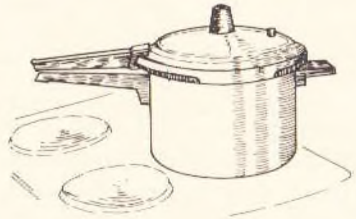
Temperatur: ca. −30 °C

Temperatur: ca. −50 °C

4.3.3 Temperatur und Druck

Die Angabe des Siedepunkts bezieht sich immer auf den Normalluftdruck.

Der Siedepunkt eines Stoffes ist vom Druck abhängig. Siedende Flüssigkeiten erzeugen in einem abgeschlossenen System selbst eine Druckerhöhung. Hier einige Anwendungen:



a) **Schnellkochtopf (Papinscher Topf)**

Der beim Kochen aufsteigende Dampf erzeugt im Topf einen Druck von ca. 2 bar. Dadurch wird der Siedepunkt des Wassers auf ca. 123 °C heraufgesetzt. Die Speisen werden schneller gar, wodurch Energie gespart wird.

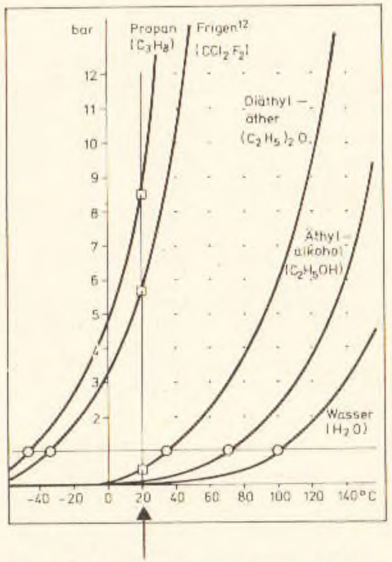
Durch Sieden entsteht ein solch hoher Druck, daß das Treibgas flüssig bleibt.

Wegen des hohen Druckes ist der Boden der Sprayflaschen nach innen gewölbt. Dadurch wird eine bessere Stabilität erreicht.

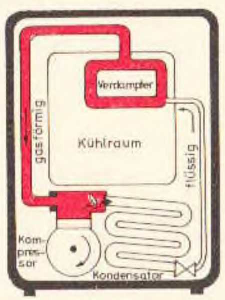
b) **Sprayflaschen**

Die Sprayflaschen enthalten ein Treibgas. Der Siedepunkt des Treibgases liegt bei ca. −30 °C. Beim Einfüllen des Gases fängt es an zu sieden und erzeugt damit einen Überdruck in der Flasche. Dieser Druck reicht aus, den Siedepunkt auf Zimmertemperatur heraufzusetzen. Drückt man nun auf den Sprühkopf einer Sprayflasche, so kann das Gas wegen des Überdrucks (ca. 5,5 bar) ausströmen. Unter normalem Luftdruck verdampft es sofort. Da jetzt in der Flasche der Druck nachläßt fängt das Treibgas an zu sieden, und zwar so lange, bis der Druck von 5,5 bar erreicht ist.

Ähnliche Vorgänge spielen sich auch in Propangasflaschen ab, nur daß sie wegen des höheren Drucks (8,5 bar) aus Stahl bestehen müssen. Bei der Handhabung mit Spraydosen oder Propangasflaschen ist immer darauf zu achten, daß die Außentemperatur nicht zu stark ansteigt, weil das eine Druckerhöhung zur Folge hat.



Diese Linie zeigt den Dampfdruck bei Raumtemperatur an.



Beachte: Beim Verdampfen entzieht der Stoff seiner Umgebung Wärme (z. B. wenn Feuerzeug-Flüssiggas auf die Hand gelangt).

Das nebenstehende Diagramm zeigt die Abhängigkeit des Dampfdrucks von der Temperatur. Der Dampfdruck ist der Druck, der sich beim Sieden einer Flüssigkeit bei einer bestimmten Temperatur in einem geschlossenen Gefäß einstellt. Die einzelnen Kurven geben Auskunft über den Siedepunkt eines Stoffes bei einem bestimmten Druck in Abhängigkeit zur Temperatur. Die waagerechte und senkrechte Linie zeigen die Verhältnisse unter normalem Luftdruck und bei Zimmertemperatur.

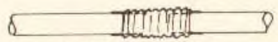
Durch eine Verminderung des Drucks wird eine Herabsetzung des Siedepunkts erreicht. So kocht Wasser unter einer Vakuumglocke bereits bei einer Temperatur von 11 °C. Diese Erscheinung macht man sich beim sog. Gefriertrocknen zunutze. Dabei werden unter tiefen Temperaturen und im Vakuum Stoffe zum Sieden gebracht (z. B. gefriergetrockneter Kaffee). Dieses Verfahren ist für das Ausgangsprodukt sehr schonend.

Auch im Kompressorkühlschrank findet man eine Anwendung dieser Erkenntnisse. Er besteht aus:

- **Kompressor:** Er verdichtet das Frigen.
- **Kondensator:** Im Kondensator wird das verdichtete Frigen durch Wärmeabgabe und dadurch bedingte Herabsetzung der Temperatur verflüssigt (Lamellen an der Rückseite des Kühlschranks).
- **Verdampfer:** Das Frigen wird entspannt; es verdampft, wobei es seiner Umgebung Wärme entzieht. Im Kühlschrank wird es kalt.

4.3.4 Längen- und Volumenausdehnung

Alle Körper dehnen sich bei Erwärmung in allen drei Dimensionen aus und ziehen sich bei Abkühlung zusammen.
(Ausnahme: Wasser)



Dehnungsmanschette

Auf die Wärmedehnung muß bei der Konstruktion, z. B. von Brükken, Hochspannungsleitungen, Heizungsrohren usw., Rücksicht genommen werden.

Brücken haben an den Enden sog. Dehnungsfugen und sind mit den Trägern lose verbunden. Oftmals liegen Brücken sogar auf Rollen.

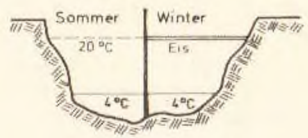
Hochspannungsleitungen müssen einen bestimmten Durchhang haben, damit sie im Winter nicht zerreißen. Im Sommer dürfen sie jedoch nicht so weit durchhängen, daß sie dem Erdboden zu nahe kommen.

Heizungsrohre dürfen nicht nur starr miteinander verbunden werden, weil sie sich sonst verbiegen würden. Um das zu verhindern, werden flexible Stücke (sog. Dehnungsmanschetten) eingesetzt.

aus 1 dm³ Wasser werden 1,1 dm³ Eis

Wasser zeigt bezüglich seiner Wärmedehnung ein außergewöhnliches Verhalten; man spricht auch von der Anomalie des Wassers. Sie ist wie folgt gekennzeichnet:

- Wasser hat bei 4 °C seine größte Dichte.
- Sein Volumen nimmt oberhalb 4 °C – wie bei anderen Stoffen – mit zunehmender Temperatur zu.
- Aber auch bei Temperaturabnahme unterhalb 4 °C nimmt das Volumen zu – aus 10 Teilen Wasser entstehen 11 Teile Eis.



Nur aufgrund dieser Anomalie kann die Natur im Wasser überleben. Denn das Eis schwimmt oben und das Wasser von 4 °C befindet sich stets direkt am Grund eines Gewässers. In diesem Lebensraum „überwintern“ auch die Fische.

Beachte: Index 1 → ℓ_1; ϑ_1 kennzeichnet den Ausgangszustand, z. B. bei 20 °C,

Index 2 → ℓ_2; ϑ_2 den Zustand nach Erwärmung bzw. Abkühlung.

$\Delta \ell$ ist proportional ℓ_1

$\Delta \ell$ ist proportional der Temperaturveränderung $\Delta \vartheta$

$\Delta \vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$

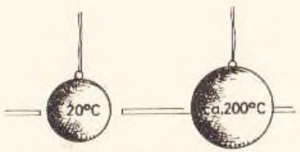
$$\Delta \ell = \ell_1 \cdot \alpha\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$\ell_2 = \ell_1 + \ell_1 \cdot \alpha \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$\ell_2 = \ell_1\,(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)$$

$$\ell_2 = \ell_1\,(1 - \alpha\,\Delta \vartheta)$$

$$R_w = R_{20} + R_{20} \cdot \alpha\,(\vartheta_w - \vartheta_{20})$$



Ausdehnung einer Eisenkugel

Stoffe (außer Wasser) dehnen sich mit zunehmender Temperatur linear aus. Deshalb kann für jeden Stoff auch eine Längenausdehnungszahl angegeben werden. Die Längenausdehnung $\Delta \ell$ ist abhängig von:

– der ursprünglichen Länge ℓ_1.
(Ein kurzer Körper wird sich nicht so stark wie ein langer ausdehnen.)

– der Temperaturdifferenz $\Delta \vartheta$.
(Wird ein Körper nur wenig erwärmt, wird er sich weniger ausdehnen als ein stark erwärmter Körper.)

– dem Material.
(Die Materialeigenschaft wird durch die Längenausdehnungszahl α angegeben. α gibt Auskunft darüber, um wieviel Meter sich ein 1 m langer Stab bei einer Temperaturerhöhung um 1 °C ausdehnt.)

Damit kann die Formel für die Längenausdehnung eines Körpers geschrieben werden.

Addiert man die Längenausdehnung zu der ursprünglichen Länge, so erhält man die Gesamtlänge nach der Ausdehnung.

Bei Temperaturverringerung ist $\Delta \vartheta$ negativ; es ergibt sich damit eine Verkürzung des Stabes.

Diese Formel ist mit der für die Widerstandserhöhung bei Temperaturanstieg vergleichbar.

Selbstverständlich dehnen sich die Körper nicht nur in ihrer Länge, sondern auch in Höhe und Breite aus. Die Volumenausdehnung von festen Körpern ist relativ uninteressant, da bei festen Körpern die Ausdehnung nach jeder Seite berechnet werden kann.

Bei **Flüssigkeiten** muß jedoch die Volumenausdehnung berücksichtigt werden. Die Formel hierfür lautet entsprechend der für die Längenausdehnung:

$$V_2 = V_1 + V_1 \cdot \gamma \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$V_2 = V_1\,(1 + \gamma\,\Delta \vartheta)$$

Für **Gase** gilt entsprechend:

$$V_2 = V_1 + V_1 \cdot \frac{1}{273} \cdot \Delta \vartheta$$

$$V_2 = V_1\left(1 + \frac{\Delta \vartheta}{273}\right)$$

Es wird vorausgesetzt, daß sog. ideale Gase nicht flüssig werden!

Achtung!

Bei Ausdehnung werden große Kräfte frei. Im Sommer laufen voll aufgefüllte Tanks von Kfz über, da das Benzin aus dem relativ kühlen Tank im Erdboden in den Fahrzeugtank gelangt, sich dort erwärmt und ausdehnt.

Die Volumenausdehnungszahl ist für alle Gase gleich. Sie beträgt $^1/_{273}$. Würde also ein Gas auf −273 °C abgekühlt, so wäre es überhaupt nicht mehr vorhanden. Bei noch niedrigeren Temperaturen müßten sogar negative Werte entstehen, woraus man folgern kann, daß es tiefere Temperaturen überhaupt nicht gibt. Man bedenke aber, daß sich Gase bei sehr niedrigen Temperaturen verflüssigen und dann andere Gesetzmäßigkeiten gelten.

Beispiele:

a) Eine Kupferleitung hat bei 10 °C eine Länge von 500 m. Wie lang ist sie bei 30 °C und −20 °C?

α für Kupfer = 0,000 017

$\ell_1 = 500$ m
$\vartheta_1 = 10$ °C
$\vartheta_2 = 30$ °C
$\ell_2 = ?$
$\vartheta_3 = -20$ °C
$\ell_3 = ?$

$$\ell_2 = \ell_1 + \ell_1 \cdot \alpha \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$
$$= 500 + 500 \cdot 0{,}000\,017 \cdot 20$$
$$= 500 + 0{,}17$$
$$= 500{,}17 \text{ m}$$

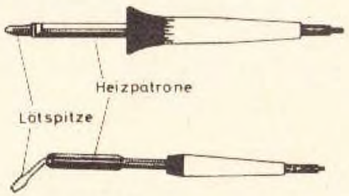
$$\ell_3 = \ell_1 + \ell_1 \cdot \alpha \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_1)$$
$$= 500 + 500 \cdot 0{,}000\,017 \cdot (-30)$$
$$= 500 - 0{,}255$$
$$= 499{,}745 \text{ m}$$

b) Wie groß ist die Volumenzunahme von 50 000 l Benzol bei einer Temperaturerhöhung von 35 °C? (Volumenausdehnungszahl γ von Benzol beträgt $0{,}0012\,\frac{1}{°C}$.)

$$\Delta V = V_1 \cdot \gamma \cdot \Delta \vartheta$$
$$\Delta V = 50\,000 \cdot 0{,}0012 \cdot 35 \text{ l}$$
$$\Delta V = 2100 \text{ l}$$

4.4 Wärmeausbreitung

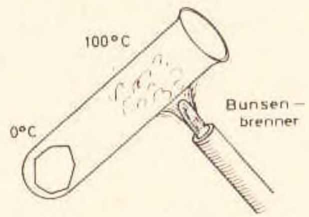
4.4.1 Wärmeleitung



Anwendung:

Ein Lötkolben hat eine Kupferspitze, um die Wärme gut zur Lötstelle zu leiten.

Griffe von heißwerdenden Gegenständen bestehen aus Holz oder Kunststoff.



Grundsätzlich gilt, daß feste, flüssige und gasförmige Körper wärmeleitend sind.

Dabei gilt der folgende Grundsatz:

Die Wärme geht immer von den heißen Teilen eines Körpers in dessen kältere über.

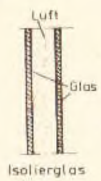
Als gute Wärmeleiter können alle guten elektrischen Leiter bezeichnet werden. Darunter fallen Silber, Kupfer und Aluminium.

Isolatoren dagegen, die häufig aus Keramik, Porzellan oder Kunststoff bestehen, leiten die Wärme schlecht.

Wasser ist ebenfalls ein schlechter Wärmeleiter. Es ist möglich, in einem Reagenzglas oben Wasser kochen zu lassen, während sich unten Eis befindet.

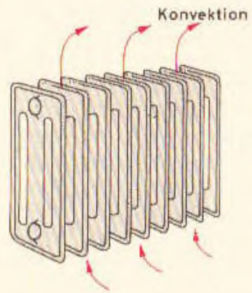
Die Rohrleitungen einer Heizung werden mit Glaswolle isoliert.

Die Wärmeleitung ist ca. 4mal geringer als bei Einschichtglas.



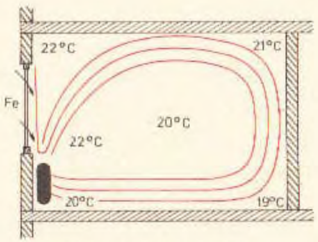
Auch Gase sind zu den schlechten Wärmeleitern zu zählen. Ein poröser Werkstoff, der viel Luft enthält (Glaswolle), wird zur Wärmeisolation verwendet. Eine weitere Kombination bildet Glas und Luft bei den Thermopanescheiben. Bei der Fabrikation dieser Scheiben wird der Zwischenraum mit heißer, trockener Luft gefüllt, um ein Beschlagen der Scheiben zu verhindern und eine gute Wärmeisolation zu erreichen.

4.4.2 Wärmeströmung (Konvektion)



Am deutlichsten erkennt man die Wärmeströmung an einem Heizkörper:

Die Luft, die sich in unmittelbarer Nähe des Heizkörpers befindet, wird erwärmt und steigt wegen ihrer geringeren Dichte nach oben; die Wärme wird mitgeführt. Die sich am Boden befindlichen kalten Luftmassen werden ständig erwärmt und steigen auf. Nach ihrer Abkühlung gelangen sie auf den Boden und wieder an den Heizkörper. Es ist ein Kreislauf entstanden. Die Oberfläche eines Heizkörpers wird durch die Rippenform wesentlich vergrößert; es kann mehr Wärme abgegeben werden.

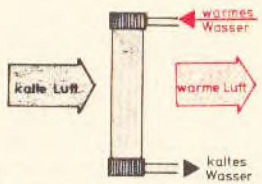


Konvektion der Luft in einem Raum durch einen Heizkörper

Ähnlich ist auch das Kühlblech eines Leistungstransistors aufgebaut. Hier geht die Wärme zunächst vom Bauteil auf das Kühlblech über (Wärmeleitung), um sie anschließend durch Konvektion an die Luft abzugeben. Um eine noch bessere Wärmeleitung zu erzielen, wird zwischen Transistor und Kühlblech Wärmepaste aufgebracht.

Transistorkühlblech

Bei der Kühlung eines Automotors wird die Wärme in der Regel durch das Kühlwasser vom Motor abgeführt. Durch den Kühler, der durch seine Lamellenform eine besonders große Oberfläche hat, wird die Wärme an die Luft abgegeben. Ähnlich funktioniert auch die Heizung eines Pkw. Derartige Einrichtungen werden Wärmetauscher genannt.

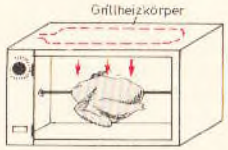


Prinzip des Wärmetauschers (Konvektion von Flüssigkeiten und Gasen)

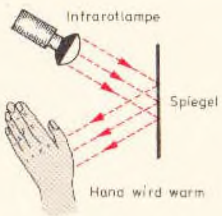
4.4.3 Wärmestrahlung

Der Infrarotanteil des Sonnenlichts hat den größten Anteil an der Wärmestrahlung.

Jeder erwärmte Körper sendet Wärmestrahlen aus!



Infrarotgrill



Die Wirkung der Wärmestrahlen erkennt man an der Erwärmung eines Körpers. Während die Scheiben eines Autos relativ kühl bleiben, erwärmt sich das Blech stärker.

Von der Sonne gelangen ständig große Wärmemengen auf die Erde. Die Mitführung der Wärme über eine Strecke von ca. 150 Millionen Kilometern kann weder durch Wärmeleitung noch durch Konvektion geschehen, da der Raum zwischen Sonne und Erde zum größten Teil frei von Materie ist. Demnach gibt es noch eine dritte Möglichkeit der Wärmeabgabe – es ist die Wärmestrahlung.

Im täglichen Leben umgeben uns eine Menge Gegenstände und Geräte, die Wärmestrahlen erzeugen:

- In einem Grill werden Fleischspeisen durch Wärmestrahlen zubereitet.
- In der Medizin wird häufig von wärmespendenden Infrarotlampen Gebrauch gemacht. Ferner ist die Wärmestrahlung einer Glühbirne nicht unerheblich.

Wärmestrahlen können ebenso wie Schallwellen oder Lichtstrahlen reflektiert werden. Dabei spielt die Farbe eines Gegenstandes eine große Rolle:

Helle Körper (weiße Kleidung, verspiegelte Flächen) reflektieren Wärmestrahlen besser als dunkle. Die letztgenannten absorbieren (aufnehmen) die Wärmestrahlen. Deshalb ist es auch unzweckmäßig, sich im Sommer schwarz zu kleiden. Durchsichtige Glasflächen bieten ebenfalls keinen Schutz vor Wärmestrahlen. Große Glasflächen werden häufig aus getöntem und verspiegeltem Glas hergestellt.

Zur Lernerfolgssicherung

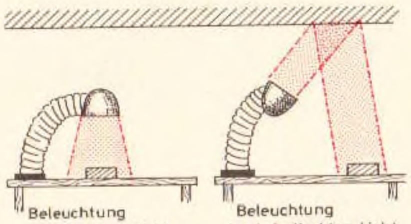
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Wärmeenergie und Molekularbewegung in Stoffen?
- Beschreiben Sie mit Hilfe der Molekularbewegung die Begriffe Temperatur, absoluter Nullpunkt, Aggregatzustände und Wärmedehnung von Stoffen!
- In welcher SI-Einheit wird die Wärmemenge angegeben?
- Beschreiben Sie den Aufbau und die grundsätzliche Wirkungsweise von zwei verschiedenen Arten von Thermometern!
- Geben Sie Beispiele aus der Technik an, bei denen die Wärmedehnung von Stoffen berücksichtigt werden muß!
- Beschreiben Sie den Übergang in die verschiedenen Aggregatzustände am Beispiel des Wassers!
- Warum haben Dampfmaschinen einen schlechten Wirkungsgrad?
- Was versteht man unter der Anomalie des Wassers?
- Beschreiben Sie je ein Anwendungsbeispiel für die verschiedenen Arten der Wärmeausbreitung!
- Nennen Sie je zwei Stoffe mit guter und schlechter Wärmeleitfähigkeit!
- Wozu werden Stoffe mit guter und wozu Stoffe mit schlechter Wärmeleitfähigkeit ausgenutzt?

5 Optik

5.1 Eigenschaften des Lichts

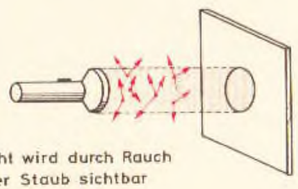
Es können nur solche Gegenstände gesehen werden, die Licht ausstrahlen.

Licht von Lichtquellen heißt direktes und das von beleuchteten Flächen reflektierte indirektes Licht.



Beleuchtung durch direktes Licht

Beleuchtung durch indirektes Licht



Licht wird durch Rauch oder Staub sichtbar

Beim Schmieden kann man beobachten, daß sich Eisen auf Rot- oder Weißglut durch Erhitzen in der Flamme verfärbt. Aus der Wärmezufuhr des Schmiedefeuers ist Licht geworden, das wir mit unserem Auge wahrnehmen können. Was ist also Licht?

Licht ist eine Energieform, die aus anderen Energieformen entsteht. Diese Energie kann z. B. Wärme-, elektrische, chemische oder mechanische Energie sein.

Da alle Lichtquellen selbst Licht erzeugen, nennt man sie selbstleuchtend. Alle Gegenstände, die selbst keine Lichtquellen sind, werden sichtbar, wenn Licht auf sie fällt. Bei völliger Dunkelheit werden keine Lichtstrahlen von den nicht selbst leuchtenden Körpern zurückgestrahlt (= reflektiert). Deshalb ist es auch unmöglich für uns, bei völliger Finsternis etwas zu erkennen.

Fällt Licht durch eine kleine Öffnung in einen verdunkelten Raum, dann ist es nur an einer Wand zu erkennen. D. h., vorbeiflutendes Licht ist unsichtbar. Wird jedoch Rauch in den Raum geblasen, dann kann der Lichtstrahl wegen der Reflexion an den Rauchteilchen wahrgenommen werden.

Lichtstrahlen sind elektromagnetische Wellen !

An dem durch Rauch sichtbar gemachten Licht ist zu erkennen, daß sich Lichtstrahlen nach allen Seiten und geradlinig ausbreiten.

Während sich Schallwellen nur in Materie ausbreiten können, pflanzt sich das Licht auch im materielosen Raum fort. So gelangt z. B. das Licht der Sonne durch den Weltenraum zu uns auf die Erde.

Treffen Lichtstrahlen auf einen Körper, so bestehen die folgenden Möglichkeiten:

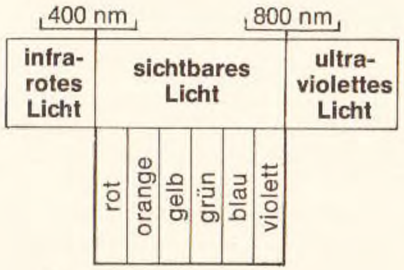
Er ist durchsichtig. **Beispiele:** Glas, Luft, dünne Wasserschichten.	1. Das Licht durchdringt den Körper fast völlig.
Er ist durchscheinend. **Beispiele:** Mattglas, Pergamentpapier, Nylongewebe.	2. Ein Teil des Lichts wird absorbiert (verschluckt) bzw. reflektiert, ein anderer Teil durchdringt den Körper.
Er ist undurchsichtig. **Beispiele:** Metalle, Steine, Holz, Pappe.	3. Das Licht wird je nach Beschaffenheit der Oberfläche mehr oder weniger absorbiert oder reflektiert.

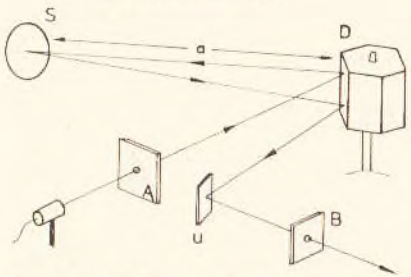
Auch im Schatten ist es hell!

Lichtstrahlen können an Gegenständen zurückgeworfen oder an ihnen gebrochen werden und gelangen dadurch auch an Stellen, die nicht direkt angestrahlt werden. Deshalb können auch Gegenstände gesehen werden, die sich z. B. unter einem Tisch oder hinter einem Schrank befinden. Durch die Streuung des Tageslichts an Bäumen, Häusern, Wolken usw. entsteht das für unser Auge sehr angenehme diffuse Tageslicht.

LICHT
- ist eine Energieform (elektromagnetische Wellen).
- breitet sich geradlinig aus. Es ist selbst nicht sichtbar.
- pflanzt sich auch im Vakuum fort.
- kann an Gegenständen reflektiert und gebrochen werden.

Licht — als elektromagnetische Wellen — kann in einem bestimmten Frequenzbereich vom menschlichen Auge wahrgenommen werden. Unterhalb der unteren Frequenzgrenze spricht man von Infrarotlicht, oberhalb der oberen Frequenzgrenze von Ultraviolettlicht.





Versuch zur Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Foucault-Michelson (1850). Beim Drehen des achteckigen Drehspiegels fällt das Licht nicht durch B. Erst wenn er sich so schnell dreht, daß er sich in derselben Zeit um 45° gedreht hat, wie das Licht für die Strecke $2a$ benötigt, dann kann der Lichtstrahl erkannt werden. Bei einer sehr langen Strecke a konnte die Lichtgeschwindigkeit sehr genau ermittelt werden ($\pm 4\ \frac{km}{s}$).

Beispiel:

Welche Zeit benötigt ein Lichtstrahl, um a) von der Sonne ($150 \cdot 10^6$ km) und b) vom Mond (384 000 km) zur Erde zu gelangen?

Weißes Licht kann durch ein Prisma in seine sog. Spektralfarben zerlegt werden. Die jeweilige Spektralfarbe gehört zu einer bestimmten Frequenz. Als kennzeichnende Größe für eine bestimmte Lichtfarbe wird in der Optik meistens die Wellenlänge in nm (Nanometer) angegeben.

Das menschliche Auge ist für die verschiedenen Spektralfarben unterschiedlich empfindlich. Die größte Empfindlichkeit besitzt es in der Mitte des Bereichs sichtbaren Lichts, also für gelb-grünes Licht.

Bis zum Mittelalter glaubte man, daß das Licht zur Ausbreitung keine Zeit braucht. Erst im 19ten Jahrhundert (Fizeau 1849) wurde die Entdeckung gemacht, daß das Licht eine hohe Ausbreitungsgeschwindigkeit hat. Moderne Meßmethoden ergaben eine Lichtgeschwindigkeit c im luftleeren Raum von genau

$$c = 299\,792{,}5\ \frac{km}{s} \quad \text{oder ungefähr}$$

$$c = 300\,000\ \frac{km}{s}$$

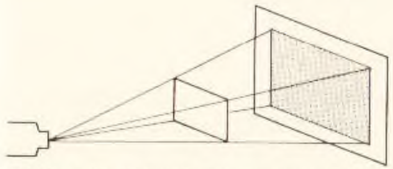
Im Wasser verringert sich die Lichtgeschwindigkeit; sie beträgt dort

$$c_{Wasser} = 225\,000 \frac{km}{s}$$

$$\text{a)}\quad t_S = \frac{s}{c} = \frac{150 \cdot 10^6\ km}{30 \cdot 10^4\ \frac{km}{s}} = 500\ s$$

$$= 8\frac{1}{3}\ min$$

$$\text{b)}\quad t_M = \frac{s}{c} = \frac{384 \cdot 10^3\ km}{300 \cdot 10^3\ \frac{km}{s}} = 1{,}28\ s$$

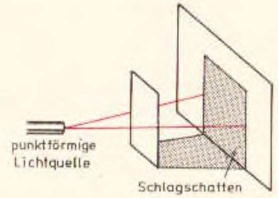


Schatten als Nachweis der geraden Lichtstrahlen

Ebenso wie Wärmestrahlen können auch Lichtstrahlen abgeschirmt werden. Dabei entsteht hinter dem beleuchteten Gegenstand ein Schatten. Die Schattenbildung ist auch ein Nachweis dafür, daß sich Lichtstrahlen geradlinig ausbreiten. Bei der Schattenbildung unterscheidet man zwischen:

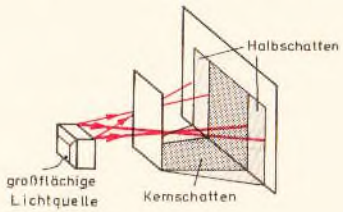
a) **Schlagschatten**

Der Schlagschatten entsteht nur bei punktförmigen Lichtquellen. Es entsteht ein scharf abgegrenzter Schatten.



b) **Kern- und Halbschatten**

Die meisten Lichtquellen sind aber nicht punktförmig, sondern relativ großflächig. Bei einer solchen ausgedehnten Lichtquelle gibt es einen Bereich von dunkel bis hell. Der dunkle Bereich wird Kernschatten und der Graubereich Halbschatten genannt.



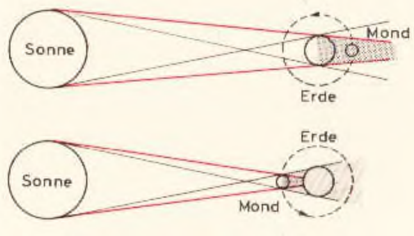
Auch Naturerscheinungen, wie Mond- und Sonnenfinsternis, sind auf die Schattenbildung zurückzuführen.

a) **Mondfinsternis**

Liegt der Mond im Kernschatten der Erde, so ist er nicht sichtbar.

b) **Sonnenfinsternis**

Dabei liegt die Erde im Kernschatten des Mondes. Der Durchmesser des Kernschattenbereichs (totale Sonnenfinsternis) beträgt nur ca. 250 km. Beobachter im Halbschatten sehen nur eine partielle Sonnenfinsternis.



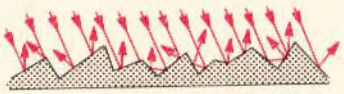
(Stark verzerrter Maßstab)

5.2 Reflexion und Brechung des Lichts

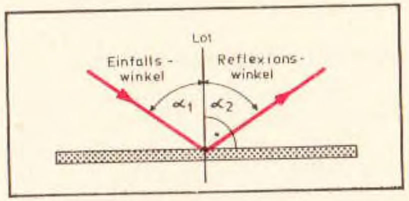
5.2.1 Reflexionsgesetz

Reflexion des Lichts:

Samt	ca. 3 %
Weiße Wand	ca. 20 %
Weißes Papier	ca. 70 %
Spiegel	ca. 95 %



Reflexion an einer rauhen Oberfläche



Fallen Lichtstrahlen auf einen Körper, dann werden diese von ihm je nach Oberfläche und Farbe reflektiert.

Fällt das Licht auf einen Gegenstand mit einer rauhen Oberfläche, die man sich aus lauter kleinen glatten Stückchen zusammengesetzt vorstellen kann, dann wird das Licht in verschiedene Richtungen so reflektiert, daß der Eindruck zerstreuten Lichts entsteht.

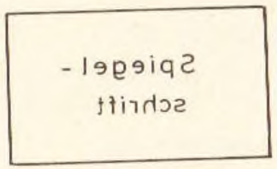
Die Reflexion eines Lichtstrahls läßt sich am besten mit Hilfe eines ebenen Spiegels untersuchen.

Wird ein scharf begrenzter Lichtstrahl auf einen Spiegel gelenkt, dann liegen der einfallende, der zurückgeworfene Strahl und das Lot auf die Spiegelfläche in einer Ebene. Beide Strahlen bilden mit dem Lot die gleichen Winkel.

Reflexionsgesetz

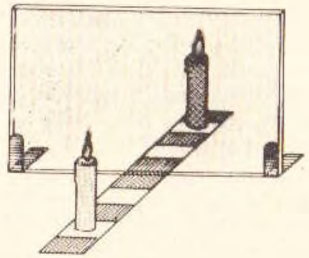
In bezug auf das Lot ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel (Ausfallswinkel).

Ebener Spiegel

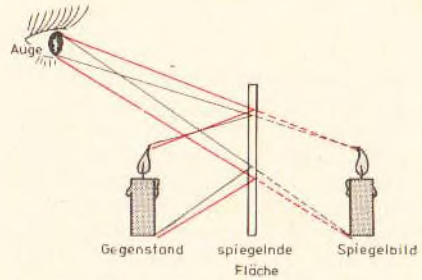


Das Wort „Spiegelschrift" als Abbildung auf einem Spiegel

Das Reflexionsgesetz sagt etwas über den Verlauf des Lichtstrahls aus. Aus Erfahrung weiß man aber, daß in einem Spiegel ein Bild entsteht, wenn z. B. ein Gegenstand vor ihm steht. Wie entstehen solche Spiegelbilder? Der nachfolgend beschriebene Versuch soll Auskunft darüber geben.



Zunächst wird eine brennende Kerze vor eine Glasscheibe gestellt. Dann nimmt man eine zweite Kerze und stellt sie genau an die Stelle, wo das Spiegelbild der Kerzenflamme sich augenscheinlich befindet. Wird jetzt die Entfernung der beiden Kerzen zur Glasscheibe gemessen, dann ergeben sich in beiden Fällen dieselben Abstände. Ferner steht die Verbindungslinie zwischen beiden Kerzen senkrecht zur Spiegelebene.

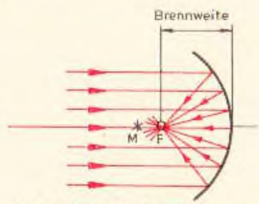


Die von der Kerze ausgehenden Lichtstrahlen werden am Spiegel reflektiert und gelangen zu unserem Auge (Einfalls- und Reflexionswinkel sind gleich). Das Auge sucht jedoch den Ursprung der Strahlen dort, von wo sie anscheinend herkommen, also von ihrer geradlinigen Verlängerung hinter dem Spiegel.

Da das Auge über die wahre Herkunft des Strahls betrogen wird (es sieht nicht die einfallenden Lichtstrahlen) und das Bild nicht mit einem Schirm einzufangen ist, wird es scheinbares oder virtuelles Bild genannt.

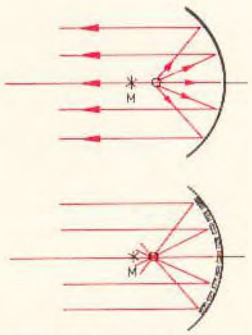
An einem ebenen Spiegel entsteht ein virtuelles, seitenverkehrtes Bild. Dabei sind Gegenstand und Spiegelbild gleich groß.

Hohlspiegel



M = Mittelpunkt des Kreises
F = Brennpunkt

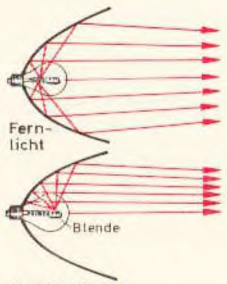
Der Hohlspiegel ist der Teil einer inneren Kugelfläche. Treffen parallelverlaufende Lichtstrahlen (Parallelstrahlen) auf einen Hohlspiegel, dann werden sie so reflektiert, daß sie alle in einem Punkt – dem Brennpunkt F – zusammentreffen. Der Abstand von der Hohlspiegelfläche bis zum Brennpunkt heißt Brennweite. Die Brennweite eines Hohlspiegels ist von dessen Krümmungsradius abhängig. Je größer der Krümmungsradius ist, desto größer ist auch die Brennweite eines Hohlspiegels.



Modellvorstellung eines Hohlspiegels

Wird jetzt der umgekehrte Weg beschritten, also eine punktförmige Lichtquelle in den Brennpunkt eines Hohlspiegels gehalten, dann werden die Brennstrahlen zu Parallelstrahlen.

Um eine Erklärung dieser Erscheinungen zu erhalten, muß man sich vorstellen, daß der Hohlspiegel aus kleinen einzelnen, ebenen Spiegeln besteht. Die Strahlen werden dann an jedem einzelnen Spiegel entsprechend dem Reflexionsgesetz reflektiert.



Abblendlicht

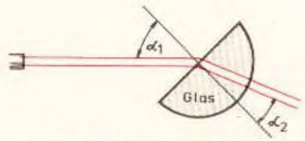
Die beschriebene Erscheinung tritt jedoch nur bei Lichtbündeln in unmittelbarer Nähe der optischen Achse auf. Um auch die Randstrahlen eines Hohlspiegels in die gewünschte Richtung zu lenken, werden Hohlspiegel meistens parabolförmig hergestellt. Das Schnittbild eines solchen Spiegels hat die Form einer Parabel.

Ein sog. Parabolspiegel bewirkt,

- daß alles parallel zur optischen Achse einfallende Licht genau im Brennpunkt zusammentrifft bzw.
- daß das von einer im Brennpunkt befindlichen punktförmigen Lichtquelle ausgesandte und vom Parabolspiegel reflektierte Licht parallel verläuft.

Parabolspiegel finden bei Scheinwerfern und Parabolantennen eine praktische Anwendung. Bei Autoscheinwerfern ist der Glühfaden des Abblendlichts von unten abgedeckt und nicht genau im Brennpunkt angebracht, sondern etwas davor. Diese Maßnahme ist notwendig, um eine Blendung der anderen Verkehrsteilnehmer zu verhindern (man würde sonst genau in den Brennpunkt schauen).

5.2.2 Brechungsgesetz



Brechung des Lichts

Richtet man einen Lichtstrahl auf einen halbkreisförmigen Glaskörper, dann wird folgendes beobachtet:

- Der Lichtstrahl ändert beim Eintritt in das Glas seine Richtung.

Die Größe der Richtungsänderung ist von der Stoffart abhängig. Bei dem oben beschriebenen Versuch tritt der Lichtstrahl von der Luft (optisch dünneres Medium) in Glas (optisch dichteres Medium) über. Der Lichtstrahl wird zum Einfallslot hin gebrochen. Die Ursache der Richtungsänderung ist die geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Glas gegenüber der Luft.

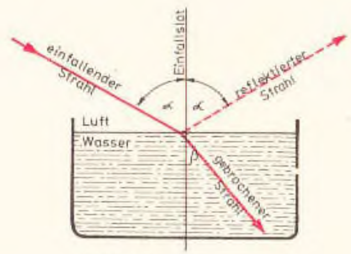
Beim Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium wird der Lichtstrahl zum Lot hin gebrochen. Im umgekehrten Fall wird der Lichtstrahl vom Einfallslot weg gebrochen.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n \text{ (Brechungszahl)}$$

Bei Versuchen wurde festgestellt, daß bei der Brechung der Quotient aus dem Sinus des Einfallswinkels α_1 und dem Sinus des Ausfallswinkels α_2 stets konstant ist. Der Quotient wird als Brechungszahl bezeichnet.

Übergang von Luft nach	Brechungszahl n
Glas	1,5–1,75
Wasser	1,3
Diamant	2,5

Die nebenstehende Tabelle gibt Auskunft über einige Brechungszahlen beim Übergang von Luft in ein anderes Medium.



Lichtbrechung

Neben der Brechung des Lichts kann noch eine andere Erscheinung erkannt werden. Es ist die sog. Totalreflexion.

Normalerweise wird der Lichtstrahl beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium vom Lot weg gebrochen. Erreicht der Einfallswinkel jedoch eine bestimmte Größe, dann können die Strahlen nicht mehr austreten, sondern werden an der Oberfläche reflektiert (siehe „Prisma“ im folgenden Abschnitt).

Beispiele:

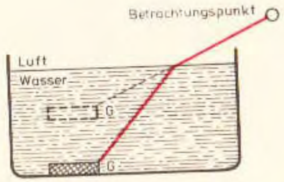
a) Ein Lichtstrahl tritt mit einem Einfallswinkel von 60° auf eine Wasseroberfläche auf. Ein Teil wird dabei unter einem Winkel reflektiert; der größte Anteil jedoch im Wasser gebrochen. Wie groß ist der Brechungswinkel ($n = 1{,}3$)?
Der Brechungswinkel beträgt 42°!

$$n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \rightarrow \sin\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_1}{n}$$

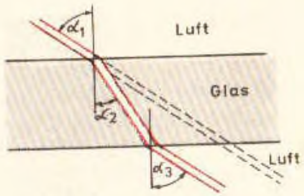
$$\sin\alpha_2 = \frac{\sin 60°}{n} = \frac{0{,}87}{1{,}3} = 0{,}67$$

$$\alpha_2 = 42°$$

b) Durch die Lichtbrechung scheinen Gegenstände, die sich im Wasser befinden und von der Luft aus betrachtet werden, immer anscheinend angehoben. Das Auge nimmt nämlich die Brechung des Lichts an der Wasseroberfläche nicht wahr!



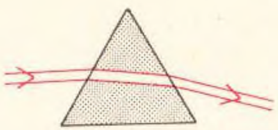
Planparallele Platte, Prisma



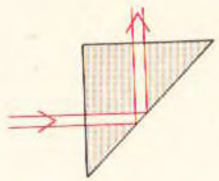
Bei der Betrachtung einer Buchseite durch eine Glasplatte fällt auf, daß das Schriftbild leicht verschoben ist. Das Brechungsgesetz liefert hier die Erklärung:

Der einfallende Lichtstrahl wird an der oberen Fläche zum Lot hin und an der unteren vom Lot weg gebrochen. Da sich oberhalb und unterhalb der Glasscheibe das gleiche Medium (Luft) befindet, sind die Brechungswinkel identisch, wodurch die seitliche Verschiebung auftritt.

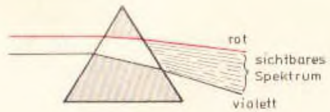
Bei einer planparallelen Platte werden die Lichtstrahlen seitlich verschoben.



Wird anstelle einer planparallelen Platte ein Prisma (Glaskeil) verwendet, dann wird das Licht ebenfalls zweimal gebrochen. Da die Kanten des Prismas zueinander schräg sind, wird der Lichtstrahl stärker als bei einer Platte und immer zur dickeren Seite hin gebrochen.



Durch Totalreflexion kann der Lichtstrahl durch ein Prisma umgelenkt werden. Dies wird z. B. in Ferngläsern ausgenutzt, um größere Brennweiten bei geringen Abmessungen zu erreichen.

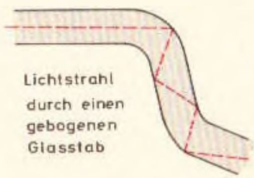


Das Prisma läßt sich auch zur Zerlegung des weißen Lichts in seine verschiedenen Farben verwenden. Diese verschiedenen Farben (Spektralfarben) entstehen durch deren unterschiedliche Wellenlängen.

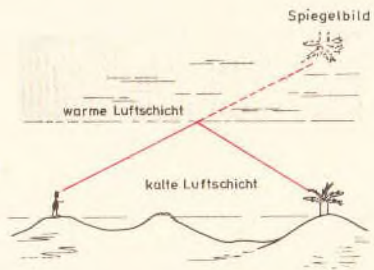
Wellenlänge der Spektralfarben des Lichts

Farbe	Wellenlänge (nm)
rot	ca. 750
orange	ca. 670
gelb	ca. 580
grün	ca. 520
blau	ca. 450
violett	ca. 390

Durch das Prisma werden die einzelnen Farben wegen ihrer unterschiedlichen Wellenlänge verschieden stark gebrochen. Am stärksten wird der violette, am wenigsten der rote Anteil des weißen Lichts gebrochen. Neben diesen sichtbaren Lichtanteilen gibt es noch unsichtbares Licht. Es ist der infrarote und der ultraviolette Anteil.



Eine weitere Anwendung der Totalreflexion sind die sog. Faseroptiken. Durch sie wurde es u. a. möglich, Einsicht in den menschlichen Körper zu nehmen. Durch Totalreflexion an den Außenkanten eines gebogenen Glasstabes ist es möglich, das Licht „um die Ecke" zu leiten. Ähnliche Versuche werden seit langem bei der Übertragung von hohen Frequenzen in Glasfasern gemacht.



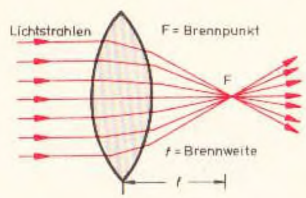
Auch an der Grenzfläche von Luftschichten verschiedener Temperatur läßt sich eine Totalreflexion beobachten. Dadurch werden Gegenstände hinter dem Horizont sichtbar. Eine dieser Erscheinungen ist die sog. Fata Morgana.

Auf einer sehr stark erwärmten Straße lassen sich auch oftmals Spiegelbilder von vorausfahrenden Autos erkennen.

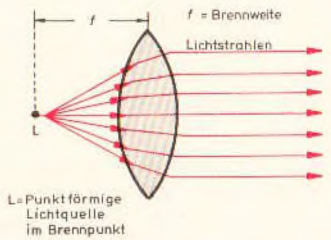
5.3 Linsen

Es wird zwischen Sammel- und Zerstreuungslinsen unterschieden. Sind die Linsen in der Mitte dicker als am Rand, dann nennt man sie konvexe Linsen (Sammellinsen). Sind die Linsenkörper dagegen innen dünner als am Rand, so bezeichnet man sie als konkave Linsen. Neben diesen beiden Grundformen gibt es noch andere aus ihnen abgeleitete Formen, die jeweils für spezielle Zwecke (Brillen, Objektive) eingesetzt werden.

5.3.1 Sammellinsen



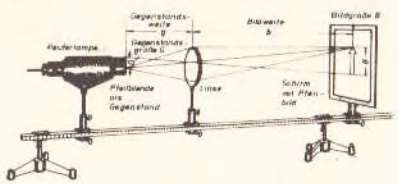
Treffen Parallelstrahlen auf eine Sammellinse, dann schneiden sie sich hinter der Linse im Brennpunkt. Parallelstrahlen werden zu Brennstrahlen. Dabei hängt der Abstand des Brennpunkts (Brennweite) zum Linsenrand vom Krümmungsradius der Linsenoberfläche ab.



Diese Wirkung läßt sich auch umkehren, indem man in den Brennpunkt eine punktförmige Lichtquelle bringt. Jetzt werden aus den Brennstrahlen Parallelstrahlen.

Bei einer Sammellinse werden Parallelstrahlen zu Brennstrahlen bzw. Brennstrahlen zu Parallelstrahlen.

Versuch zur Abbildungsgleichung:



Bei der Projektion von Dias an eine Leinwand oder beim Fotografieren ist eine Entfernungseinstellung des Objektivs notwendig, damit man ein scharfes Bild erhält. Um auf die Gesetzmäßigkeiten zu kommen, soll die folgende Versuchsreihe durchgeführt werden:

g (cm)	b (cm)	G (cm)	B (cm)	f (cm)
70	19	3,4	0,92	15
60	20	3,4	1,1	15
50	21,4	3,4	1,46	15
40	24	3,4	2,0	15
30	30	3,4	3,4	15
20	60	3,4	10	15

Auf einer optischen Bank befindet sich eine Lampe mit einer Pfeilblende. Das Licht wird durch eine Sammellinse zu einer Leinwand geleitet. Die Gegenstandsweite g und die Bildweite b werden verändert. Dabei muß b der Gegenstandsweite angepaßt werden, um ein konturenreines Bild zu erhalten. Mit dem Verändern von g wird auch die Bildgröße B größer oder kleiner. Die Brennweite f und die Gegenstandsgröße G bleiben konstant.

AUSWERTUNG
(Angabe in $\frac{1}{m}$)

$\frac{1}{g}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}$	$\frac{1}{f}$
1,44	5,26	6,7	6,7
1,7	5,0	6,7	6,7
2,0	4,7	6,7	6,7
2,5	4,17	6,7	6,7
3,33	3,33	6,7	6,7
5,0	1,67	6,7	6,7

Werden die reziproken Werte von Bildweite g und Gegenstandsweite g addiert, dann erhält man den reziproken Wert der Brennweite f:

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

Die Größe $\frac{1}{f} = D$ wird als Brechkraft bezeichnet und in Dioptrien angegeben.

AUSWERTUNG

$\frac{g}{b}$	$\frac{G}{B}$
$\frac{70}{19} = 3{,}7$	$\frac{3{,}4}{0{,}92} = 3{,}7$
$\frac{60}{20} = 3$	$\frac{3{,}4}{1{,}1} = 3$
. . .	. . .

Wird der Quotient aus der Gegenstands- und Bildgröße gebildet, dann entspricht dieser dem Verhältnis aus Gegenstandsweite zu Bildweite:

$$\frac{G}{B}=\frac{g}{b}$$

$\frac{b}{g}=\frac{B}{G}$ entspricht dem Vergrößerungsmaßstab.

Beispiel:

Durch einen Diaprojektor wird ein Dia (24 × 36 mm) auf eine 4 m entfernte Projektionswand vergrößert. Die Brennweite des Objektivs beträgt 85 mm.

a) In welcher Entfernung zum Objektiv befindet sich das Dia?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \rightarrow g = \frac{f \cdot b}{b - f}$$

$$g = \frac{0{,}085\ \text{m} \cdot 4\ \text{m}}{4\ \text{m} - 0{,}085\ \text{m}}$$

$$g = \frac{0{,}085 \cdot 4}{4 - 0{,}085}\ \text{m}$$

$$g = 0{,}0868\ \text{m} = 8{,}68\ \text{cm}$$

b) Auf welche Maße wird das Dia vergrößert?

$$\text{Vergrößerungsmaßstab:} \frac{b}{g} = \frac{400}{8{,}68}$$

$$\frac{b}{g} = 46{,}1$$

Bildgröße zu Gegenstandsgröße verhalten sich ebenfalls wie 46,1 zu 1.

$$\frac{B}{G} = 46{,}1 \rightarrow B = G \cdot 46{,}1$$

$$B_1 = 36 \cdot 46{,}1$$

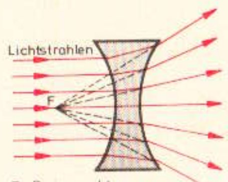
$$B_1 = 1{,}66\ \text{m}$$

$$B_2 = 46{,}1 \cdot 24$$

$$B_2 = 1{,}11\ \text{m}$$

Das Dia wird bei 4 m Abstand zum Projektor auf 1,66 m × 1,11 m vergrößert.

5.3.2 Zerstreuungslinsen



F= Brennpunkt

Fallen parallele Lichtstrahlen auf eine Zerstreuungslinse, dann werden sie hinter der Linse gestreut. Dieser Vorgang wird deutlich, wenn man sich die Linse aus lauter kleinen Prismen zusammengesetzt denkt, die den Lichtstrahl immer zur dickeren Seite brechen. Werden alle gebrochenen Strahlen verlängert, dann vereinigen sie sich vor der Linse zu einem scheinbaren Brennpunkt.

Zerstreuungslinsen brechen parallele Lichtstrahlen so, daß sie zerstreut werden.

Zur Lernerfolgssicherung

- Was ist Licht?
- Welche Größe bestimmt die Spektralfarbe des Lichts?
- Wie breitet sich Licht vorwiegend aus?
- Erläutern Sie die Begriffe sichtbares Licht – Infrarotlicht – Ultraviolettlicht!
- Unter welchen Voraussetzungen wird Licht von einem Körper reflektiert, absorbiert oder durchgelassen?
- Was gilt für den Strahlengang des Lichts beim Übergang in ein Medium anderer optischer Dichte?
- Skizzieren Sie den Strahlengang von Lichtstrahlen, die auf einen ebenen Spiegel bzw. bei parallelem Einfall auf einen Hohlspiegel treffen!
- Was ist weißes Licht?
- Beschreiben Sie die Zerlegung weißen Lichts mit Hilfe eines Prismas!
- Welche Wirkung auf parallel einfallende Lichtstrahlen haben Sammellinsen bzw. Zerstreuungslinsen?

Mathematik

1 Grundrechnungsarten

1.1 Mengen und ihre Darstellung

1.1.1 Mengenbegriff[1]

Mengenbildung nicht möglich, da Begriffe wie alt und neu nicht bestimmbar sind!

Eine Menge ist die Zusammenfassung von Objekten (Dingen), die

a) unterschiedlich voneinander,

b) genau bestimmbar sind.

Dinge, die zu einer Menge gehören, werden Elemente einer Menge genannt. Diese Beziehung wird durch das Zeichen ∈ ausgedrückt.

Beispiel:

▼ ist Element der Menge A; oder
▼ ist Element von A — ▼ $\in A$

1 ist Element von S — $1 \in S$

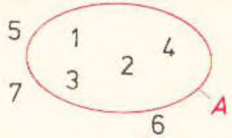
3 ist **nicht** Element von C — $3 \notin C$

Eine besondere Stellung nimmt die leere Menge ein. Sie enthält keine Elemente.

Symbole für die leere Menge: $\emptyset$ oder $\{\ \}$

1.1.2 Darstellung von Mengen

Venn- bzw. Euler-Diagramm



$3 \in A$

$7 \notin A$

Wird um die Elemente, die eine Menge bilden, eine geschlossene Linie gezogen, so entsteht ein Venn- bzw. Euler-Diagramm.

Alle Elemente, die außerhalb dieses Gebietes liegen, gehören nicht zu der Menge.

Aufzählende Form

$A = \{a; b; c; d; e\}$
$\quad = \{b; e; d; a; c\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

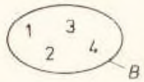
Reihe wird weiter fortgesetzt!

In der aufzählenden Form werden die Elemente einer Menge in beliebiger Reihenfolge, durch Komma oder Semikolon getrennt, nebeneinander zwischen zwei geschweifte Klammern (Mengenklammern) geschrieben.

[1] Eine Zusammenstellung der mathematischen Zeichen und Abkürzungen finden Sie am Schluß des Abschnitts 1.1.5.

Beschreibende Form

Venn-Diagramm



$B = \{x \mid x \text{ ist die Zahl } 1; 2; 3; 4\}$

Das bedeutet, daß der Buchstabe x die Zahlen 1 bis 4 annehmen kann.

Die beschreibende Form findet hauptsächlich in der Gleichungslehre Verwendung, also dort, wo mit unbekannten Größen gerechnet wird. Diese Unbekannten, auch Variable genannt, sind Stellvertreter von Zahlen oder physikalischen Größen.

Beispiel:

Der Buchstabe „x" steht für Zahlen, die kleiner sind als die Zahl 7. Für x sollen aber nur die Zahlen der Menge

$G = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

eingesetzt werden. Die vorgegebene Menge G wird als Grundmenge bezeichnet.

$x < 7$

$A = \{x \mid x < 7\}_G$

A ist die Menge aller x, für die gilt: x ist kleiner als 7 in der Grundmenge G.

Die Menge A in aufzählender Form. $A = \{3; 4; 5; 6\}$

Die Menge, aus der Elemente ausgesondert werden sollen, heißt Grundmenge.

1.1.3 Mengenverknüpfungen

Mengengleichheit

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

$\boxed{A = B \text{ bzw. } B = A}$

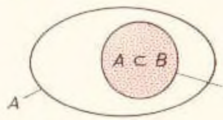
Zwei Mengen A und B sind dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

$S = \{1; 2; 3\} \qquad T = \{1; 3; 3; 2\}$

$S = T$

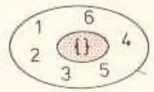
Dabei spielt die Reihenfolge oder die Wiederholung einzelner Elemente keine Rolle.

Teilmenge



$\boxed{A \subset B}$: A ist Teilmenge von B

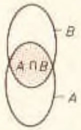
Die Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.



$\{\} \subset S$

Die **leere Menge** ist Teilmenge einer jeden Menge, da sie keine Elemente enthält.

Durchschnittsmenge



$\boxed{A \cap B = B \cap A}$

...geschnitten...
(mit)

Die Menge aller Elemente, die zu A **und** (zugleich) zu B gehören, heißt Durchschnittsmenge bzw. Schnittmenge von A und B.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

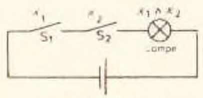
$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$

Diese Verknüpfung kann auch in der beschreibenden Form wiedergegeben werden, wenn anstelle des Wortes „und" das Symbol „∧" steht.

Gelesen: A geschnitten B ist die Menge aller x, für die gilt: x ist Element von A und zugleich ist x Element von B.

Anwendung: UND-Glied

Die Lampe leuchtet nur dann, wenn die Schalter 1 **und** (zugleich) 2 geschlossen sind.

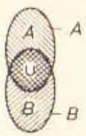


UND - Glied

Die nebenstehende Wertetabelle, auch Wahrheitstabelle genannt, macht dieselbe Aussage. Dabei steht für den geschlossenen Schalter eine 1 und für den offenen Schalter eine 0. Dasselbe gilt für die leuchtende bzw. nicht leuchtende Lampe.

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Vereinigungsmenge



$\boxed{A \cup B = B \cup A}$

...vereinigt...
(mit)

Die Menge aller Elemente, die zu A **oder** zu B **oder** zu beiden gehören, heißt Vereinigungsmenge von A und B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in A \cap B\}$

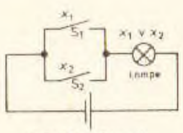
$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in A \cap B\}}$

Wird diese Verknüpfung in der beschreibenden Form dargestellt, so tritt an die Stelle des Wortes „oder" das Symbol „v".

Gelesen: A vereinigt mit B ist die Menge aller x, für die gilt: x ist Element von A oder x ist Element von B oder x ist Element von A geschnitten mit B.

Anwendung: ODER-Glied

Die Lampe leuchtet immer dann, wenn Schalter 1 oder Schalter 2 oder beide Schalter geschlossen sind.



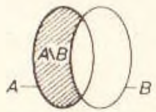
ODER-Glied

Die nebenstehende Wahrheitstabelle macht dieselbe Aussage.

An dieser Stelle wird bereits deutlich, daß zwischen den Mengenverknüpfungen und der Logik in der Digitaltechnik eine unmittelbare Verwandtschaft besteht.

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Differenzmenge



$\boxed{A \setminus B}$

A minus B oder
A ohne B

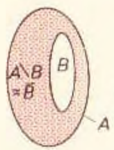
Die Menge aller Elemente, die zu A, aber nicht zu B gehören, heißt Differenzmenge $A \setminus B$.

$\boxed{A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$

Zu beachten ist, daß die Bildung der Differenzmenge nicht umkehrbar ist (vgl.: Subtraktion).

Gelesen: A minus B ist die Menge aller x, für die gilt: x ist Element von A und x ist nicht Element von B.

Rest- oder Komplementmenge



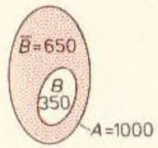
$\boxed{A \setminus B = \bar{B}}$

A minus B = B-negiert

Die Rest- oder Komplementmenge ist eine besondere Form der Differenzmenge. Ist nämlich die Menge B Teilmenge der Menge A, und bildet man $A \setminus B$, so erhält man die Komplementmenge $\bar{B}$.

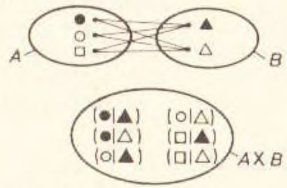
Anwendung:

In der Datenverarbeitung wird beim Subtrahieren stets das Komplement zu einer Zahl benötigt. Enthält die Menge A 1000 Elemente und die Menge B 350, so gehört zur Komplementmenge $\bar{B}$ der Rest, nämlich 650 Elemente.



Das Komplement der Zahl 350 in bezug auf die Zahl 1000. Die Zahlen geben die Anzahl der Elemente an.

Produktmenge



Die Menge aller geordneten Paare von A und B heißt Produktmenge von A und B.

$\boxed{A \times B}$: A Kreuz B

Bei der Paarbildung steht in der Klammer immer das Element der ersten Menge links und das der zweiten Menge rechts.

1.1.4 Menge und Zahl

Menge *N* der natürlichen Zahlen

$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$

$N_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$

Die Menge *N* der natürlichen Zahlen enthält alle positiven ganzen Zahlen von $+1$ bis $+\infty$ (unendlich).

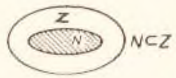
Häufig wird auch mit der Menge N_0 gerechnet. Die Menge N_0 beschreibt alle natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl 0.

Menge *Z* der ganzen Zahlen

$Z^+ = N = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

$Z^- = \{-1; -2; -3; -4; \ldots\}$

$Z^+ \cup Z^- \cup \{0\} = Z$



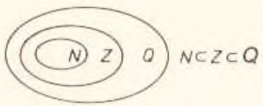
Die Menge *Z* der ganzen Zahlen besteht aus den positiven ganzen Zahlen, den negativen ganzen Zahlen und der Zahl 0.

Da die Menge *Z* der ganzen Zahlen die Menge *N* der natürlichen Zahlen enthält, ist *N* Teilmenge von *Z*.

Menge *Q* der rationalen Zahlen

$Q = \{\ldots; -\frac{3}{4}; -1; 0; 1; \frac{3}{4}; \ldots\}$

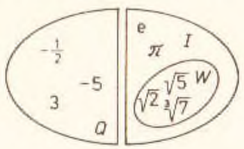
$\frac{6}{1} = 6; \frac{-5}{1} = -5; \frac{1000}{1} = 1000$

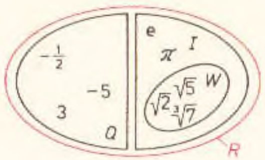


Die Menge *Q* der rationalen Zahlen enthält alle gebrochenen Zahlen.

Natürliche und ganze Zahlen lassen sich ebenfalls durch gebrochene Zahlen darstellen. Deshalb ist die Menge *Z* der ganzen Zahlen wie auch die Menge *N* der natürlichen Zahlen Teilmenge der Menge *Q* der rationalen Zahlen.

Menge *R* der reellen Zahlen





Neben den rationalen Zahlen existieren noch die sog. irrationalen Zahlen, die mit dem Buchstaben *I* gekennzeichnet werden. Unter die irrationalen Zahlen fallen die Wurzeln (*W*) und auch solche Zahlen, die sich weder durch eine Wurzel noch durch eine rationale Zahl darstellen lassen. Es sind die Zahlen π und *e*.

Faßt man alle rationalen und irrationalen Zahlen zu einer Menge zusammen, so entsteht die Menge *R* der reellen Zahlen.

1.1.5 Wertigkeit von Zahlen

Zahlengerade

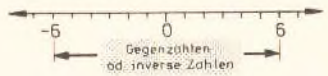
Auf der Zahlengeraden wird jeder reellen Zahl ein Punkt zugeordnet, d. h., es können alle reellen Zahlen durch die Zahlengerade dargestellt werden.

beim Rechnen:

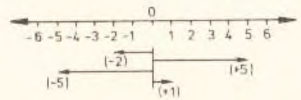
$(-4); (-3); (-1); (+1); (+3); (+4)$

Bei den positiven Zahlen kann das Vorzeichen und die Klammer fortgelassen werden: 1; 3; 4

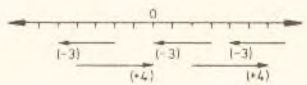
Um negative und positive Zahlen auseinanderzuhalten, werden sie in eine Klammer eingeschlossen und mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen. Dabei erhalten alle positiven ein „+“ und alle negativen ein „−“ als Vorzeichen.



Zwei Zahlen, die sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden, werden Gegenzahlen oder inverse Zahlen genannt. So ist z. B. die Gegenzahl oder inverse Zahl zu $(+6)$ die Zahl (-6).



Die Darstellung der reellen Zahlen erfolgt durch Pfeile. Dabei gibt das Vorzeichen der Zahl die Richtung des Pfeiles an. Für eine positive Zahl ist die Pfeilrichtung nach rechts, für eine negative Zahl nach links einzutragen.



Da die Länge des Pfeils den Wert der Zahl darstellt, kann er auf der Zahlengeraden beliebig verschoben werden.

Auf der Zahlengeraden wird eine negative Zahl mit Pfeilrichtung nach links, eine positive jedoch nach rechts eingetragen.

Auf der Zahlengerade werden alle Zahlen von minus ∞ bis plus ∞ dargestellt. Betrachtet man entweder nur die Richtung von 0 bis plus ∞ oder von 0 bis minus ∞, so spricht man vom Zahlenstrahl.

Wandert man auf dem Zahlenstrahl in Richtung plus ∞, wird der Wert der Zahlen größer; dagegen werden die Zahlen in Richtung minus ∞ immer kleiner.

kleine Zahl < große Zahl

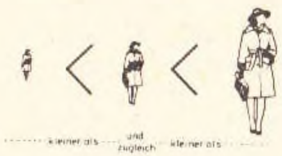
5 < 10

größer als $>$	kleiner als $<$
$5 > 3$	$2 < 10$
$-3 > -10$	$-9 < 0$
$1{,}5 > 1{,}45$	$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$

Ist eine Zahl größer oder kleiner als eine andere, wird das durch die Symbole $>$ oder $<$ dargestellt. Dabei steht die kleinere Zahl immer vor der spitzen und die größere vor der offenen Seite des Symbols.

Wichtig ist, daß der Wert der negativen Zahlen um so kleiner wird, je mehr er sich dem Wert minus ∞ nähert. Das bedeutet z. B., daß die Zahl (−9) kleiner als (−8) ist.

Je größer eine negative Zahl, um so kleiner ist ihr Wert. Durch die Symbole $<$ (kleiner als) und $>$ (größer als) kann die Wertigkeit zweier Zahlen oder Größen zueinander ausgedrückt werden.

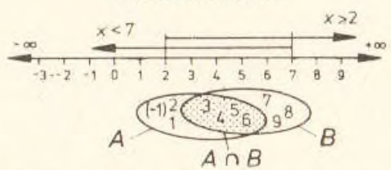


Es können auch mehrere Größerzeichen oder Kleinerzeichen zu einer Kette verbunden werden, wenn eine UND-Verknüpfung vorliegt.

Beispiele:

a) In der Menge B kann x ganze Zahlen annehmen, die größer sind als 2; in der Menge A dagegen nur die, die kleiner sind als 7. Bildet man den Durchschnitt beider Mengen, so enthält die Menge die Zahlen 3; 4; 5; 6. Die Beziehung $x > 2$ und $x < 7$ läßt sich auch zu einer Vergleichskette zusammenfassen.

Ungleichheitskette



$B \cap A = \{x \mid x > 2 \quad \text{und} \quad x < 7\}_Z$

$B \cap A = \{x \mid 2 < x \quad \wedge \quad x < 7\}_Z$

$B \cap A = \{x \mid 2 < x < 7\}_Z$

$B \cap A = \{3; 4; 5; 6\}$

b) Widerstandswerte werden bekanntlich nach verschiedenen Normreihen gestuft. Die Normreihen E 6, E 12 und E 24 sind durch unterschiedliche Toleranzen klassifiziert.

Welchen Wert kann der Widerstand $R = 1500\ \Omega$ innerhalb der Reihe E 12 (10 %) annehmen?

$\left.\begin{array}{l} R = 1500\ \Omega + 10\ \% = 1650\ \Omega \\ R = 1500\ \Omega - 10\ \% = 1350\ \Omega \end{array}\right\}$ nach E 12

Der Widerstandswert kann kleiner als 1650 Ω und größer als 1350 Ω sein. Schreibt man diese Beziehung wie nebenstehend auf, verknüpft sie mit einem „und" (∧), entsteht eine Vergleichskette, bei der die Werte 1350 Ω und 1650 Ω die sog. Grenzwerte darstellen. Würde die Messung einen Wert von 1240 Ω ergeben, wäre die Bedingung nicht erfüllt, d. h., er liegt außerhalb der 10 %-Toleranz.

$R > 1350\ \Omega$ und $R < 1650\ \Omega$

umkehren

$\boxed{1350\ \Omega < R}$ und $\boxed{R < 1650\ \Omega}$ → ∧ → $\boxed{1350\ \Omega < R < 1650\ \Omega}$

c) Die Ausgangsspannung U eines Netzgeräts darf zwischen den Werten 11,5 V und 12,5 V schwanken. In diesem Fall faßt man die Zeichen „=" und „<" bzw. „>" zu den Zeichen „≤" bzw. „≥" zusammen. Dabei gehören die Grenzwerte oder -zahlen selbst zu dem zu beschreibenden Bereich. Bei der Aufstellung der Vergleichskette kann vereinfacht wie folgt verfahren werden:

$\boxed{U = 11{,}5\ \text{V}}$ und $\boxed{U > 11{,}5\ \text{V}}$ → ∧ → $\boxed{U \geq 11{,}5\ \text{V}}$

$\boxed{U = 12{,}5\ \text{V}}$ und $\boxed{U < 12{,}5\ \text{V}}$ → ∧ → $\boxed{U \leq 12{,}5\ \text{V}}$

a) Spannung U in die Mitte schreiben. — U

b) Eintragen: U ist größer gleich 11,5 V. — $11{,}5\ \text{V} \leq U$

c) Eintragen: U ist kleiner gleich 12,5 V. — $\boxed{11{,}5\ \text{V} \leq U \leq 12{,}5\ \text{V}}$

d) Bei der Berechnung einer Stabilisierungsschaltung mit einer Z-Diode ergab sich für $R_{V\min}$ ein Wert von 245 Ω und für $R_{V\max}$ von 303 Ω. Der nach der Reihe E 12 auszuwählende Widerstand R_V muß zwischen diesen Grenzen liegen, d. h., R_V muß größer sein als $R_{V\min}$ und kleiner sein als $R_{V\max}$.

$R_{V\min}$: kleinster zulässiger Wert

$R_{V\max}$: größter zulässiger Wert

$\boxed{R_V > R_{V\min}}$ und $\boxed{R_V < R_{V\max}}$

$\boxed{R_{V\min} < R_V}$ und $\boxed{R_V < R_{V\max}}$ → ∧

$\boxed{R_{V\min} < R_V < R_{V\max}}$

$\boxed{245\ \Omega < R_V < 303\ \Omega}$

Auch hier läßt sich eine Vergleichskette schreiben. Da als Werte nur die E 12-Reihe (Grundmenge) in Frage kommt, wurden 270 Ω gewählt.

gewählt: $R_V = 270\ \Omega$

In einer Vergleichskette stehen immer entweder nur Größerzeichen oder nur Kleinerzeichen. Es dürfen nur Zahlen oder Größen eingesetzt werden, die innerhalb der Grenzen der Kette liegen.

Mathematische Zeichen und Abkürzungen

$A, B \ldots$	Mengen
$\{a; b; c\}$	Menge der Elemente *a, b, c*
N	Menge der natürlichen Zahlen
Q	Menge der rationalen Zahlen
R	Menge der reellen Zahlen
Z	Menge der ganzen Zahlen
$\emptyset; \{\,\}$	Leere Menge
$\in$	... ist Element von ...
$\notin$	... ist nicht Element von ...
$A \subset B$	*A* ist echte Teilmenge von *B*
$A \cap B$	Durchschnittsmenge von *A* und *B*
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von *A* und *B*
$A \setminus B$	Differenzmenge von *A* und *B*
$A \times B$	Produktmenge von *A* und *B*
$=; \neq$	ist gleich; ist nicht gleich (ungleich)
$\wedge; \vee$	und; oder
$>; <$	größer als; kleiner als
$\sim; \nsim$	gleichmächtig; nicht gleichmächtig

1.1.6 Symbole für Zahlen (allgemeine Zahlen)

Mathematisches Gesetz:

Bei der Addition hat die Vertauschung der Summanden keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Formel:

$a, b \in Q \qquad a + b = b + a$

Der Zusammenhang eines mathematischen oder physikalischen Gesetzes kann in Kurzform durch eine Formel wiedergegeben werden. Da mathematische oder physikalische Gesetze allgemeingültig sind, verwendet man in den Formeln Buchstaben, die als Platzhalter für Zahlen oder physikalische Größen anzusehen sind. Diese Buchstaben werden allgemeine oder unbestimmte Zahlen genannt.

Einsetzen von bestimmten Zahlen:

Aufgrund der Bedingung $a, b \in Q$ dürfen nur rationale Zahlen anstelle der allgemeinen Zahlen *a* und *b* eingesetzt werden. Ist z. B. $a = 5$ und $b = 7$, so gilt:

$$\boxed{5 + 7 = 7 + 5}$$

Da diese Formel für alle Q gilt, wird sie allgemeingültig in Q genannt. Es kann deshalb für *a* und *b* jede nur erdenkliche rationale Zahl eingesetzt werden.

Wichtig ist auch, daß den allgemeinen Zahlen eine Information mit auf den Weg gegeben wird, für welche Zahlen sie in einer Formel stehen. Bei der Handhabung von Formeln in der Elektrotechnik besteht ja auch nur dann eine Allgemeingültigkeit, wenn anstelle der Formelzeichen die dazugehörigen Größen eingesetzt werden.

Symbole für Zahlen:

$a, b, c, d, e \ldots x, y, z$
$U, V, R, X, P, F, W \ldots$
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \Delta \ldots$

Als allgemeine Zahl benutzt man häufig die kleinen Buchstaben des Alphabetes. Andere Symbole, wie griechische Buchstaben oder große Buchstaben (hauptsächlich in physikalischen Formeln), sind ebenfalls möglich.

Folgende Regeln sind bei der Verwendung von allgemeinen Zahlen zu beachten:

a) Die Zahl oder die Größe, die eine allgemeine Zahl während einer Rechnung angenommen hat, muß immer beibehalten werden.

Ordnet man c die Zahl 6 und f die Zahl 3 zu, so gilt:

$c + f = 6 + 3 = 9$

b) Tritt in einer Formel eine allgemeine Zahl mehrmals auf, so ist sie immer Stellvertreter für dieselbe Zahl.

Fläche des Kreises:

$A = \pi \cdot r \cdot r$ für $r = 6$ cm

$A = 3{,}14 \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm}$

$A = 113{,}04\,\text{cm}^2$

Allgemeine Zahlen sind Stellvertreter von Zahlen. Die Rechenregeln von allgemeinen Zahlen entsprechen denen der Zahlen, die durch sie vertreten werden. Spricht man von $a \in R$, so handelt es sich stets um die allgemeine Zahl a, die anstelle irgendeiner reellen Zahl steht.

Beispiele:

a) Flächeninhalt Rechteck = Länge · Breite — $A = a \cdot b$

b) Ohmsches Gesetz: Spannung = Strom · Widerstand — $U = I \cdot R$

c) Umfang Kreis = $2 \cdot \pi \cdot$ Radius — $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

d) Zu berechnen ist: $a + b + c$; wenn $a = 5$; $b = 7$; $c = 9$ — $a + b + c = 5 + 7 + 9 = 21$

e) $a + c + a + a$; wenn $a = 2$; $c = 9$ — $a + c + a + a = 2 + 9 + 2 + 2 = 15$

f) $x \cdot y \cdot z$; wenn $x = 3$; $y = 1$; $z = 10$ — $x \cdot y \cdot z = 3 \cdot 1 \cdot 10 = 30$

g) $u - v + w$; wenn $u = 11$; $v = 3$; $w = 7$ — $u - v + w = 11 - 3 + 7 = 15$

h) $e + f - g$; wenn $e = 2$ DM; $f = 8$ DM; $g = 5$ DM — $e + f - g = 2\,\text{DM} + 8\,\text{DM} - 5\,\text{DM} = 5\,\text{DM}$

i) Fläche eines Trapezes $= \dfrac{\text{untere + obere Seite}}{2} \cdot$ Höhe — $A = \dfrac{a + b}{2} \cdot h$

1.1.7 Physikalische Größen

Größe	Formelzeichen	Zahlenwert	und	Einheit
Kraft	F	5		N
Strom	I	2		A
Volumen	V	212		cm^3

Zur Beachtung:

schreibt man $5x$
so heißt das: $5 \cdot x$
entsprechend 5 cm
oder $5 \cdot \text{cm}$

Eine physikalische Größe besteht immer aus Zahlenwert und Einheit. In der Physik bzw. Elektrotechnik sind bestimmten physikalischen Größen Formelzeichen zugeordnet. Soll also nach einer Formel etwas berechnet werden, so treten anstelle der Formelzeichen stets Zahlenwert und Einheit. Die Einheiten sind dabei immer wie allgemeine Zahlen zu behandeln, d. h., sie können z. B. multipliziert oder dividiert werden.

Beispiele:

a) Wie groß ist das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 5$ cm; $b = 7$ cm und $c = 10$ cm?

Formel: $V = a \cdot b \cdot c$

Größen einsetzen: $V = 5\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm}$

$V = 350\,\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}$

$V = 350\,\text{cm}^3$

b) Welchen Widerstandswert hat ein Kupferdraht mit den folgenden Daten:

$\ell = 1000\,\text{m}$; $\varkappa = 56\,\dfrac{1}{\Omega} \cdot \dfrac{\text{m}}{\text{mm}^2}$; $A = 4\,\text{mm}^2$

An dieser schon etwas komplizierteren Rechnung erkennt man, daß die Einheiten genauso behandelt werden wie Zahlen. Ergibt sich bei der Berechnung nicht die gewünschte Einheit, in diesem Fall Ω, so läßt das auf Fehler schließen.

Formel: $R = \dfrac{\ell}{\varkappa \cdot A}$

Größen einsetzen: $R = \dfrac{1000\,\text{m}}{56\,\dfrac{1}{\Omega} \cdot \dfrac{\text{m}}{\text{mm}^2} \cdot 4\,\text{mm}^2}$

Größen „rechengerecht" aufschreiben: $R = \dfrac{\Omega \cdot 1000\,\text{m} \cdot \text{mm}^2}{56 \cdot \text{m} \cdot 4\,\text{mm}^2}$

Größen kürzen: $R = \dfrac{\Omega \cdot 1000\,\cancel{\text{m}} \cdot \cancel{\text{mm}^2}}{56 \cdot \cancel{\text{m}} \cdot 4\,\cancel{\text{mm}^2}}$

$R = 4{,}5\,\Omega$

Rechnet man mit physikalischen Formeln, so treten stets an die Stelle der Formelzeichen physikalische Größen, also Zahlenwert und Einheit. Während der Rechnung sind die Einheiten mitzuführen.

1.2 Addition und Subtraktion

1.2.1 Gesetze der Addition

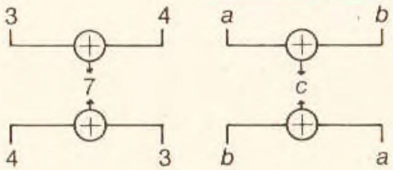
$4 + 0 = 4$ $\quad \boxed{a + 0 = a}$

Neutralelement

Neutralelement der Addition

Addiert man zu einer beliebigen Zahl die Zahl 0, entspricht der Summenwert stets dem Wert der ursprünglichen Zahl. Damit wird die Zahl 0 als Neutralelement bezüglich der Addition bezeichnet.

$3 + 4 = 4 + 3$ $\quad \boxed{a + b = b + a}$



Kommutatives Gesetz der Addition (Vertauschungsgesetz)

Werden zwei Zahlen addiert, so hat die Reihenfolge der Summanden keinen Einfluß auf das Ergebnis. Diese Eigenschaft wird als kommutativ bezeichnet.

$$\begin{aligned} &3 + 2 + 6 \\ &= (3 + 2) + 6 \\ &= 5 + 6 \\ &= 11 \\ &= (3 + 6) + 2 \\ &= 9 + 2 \\ &= (2 + 6) + 3 \\ &= 8 + 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a + b + c \\ &= (a + b) + c \\ &= (a + c) + b \\ &= (b + c) + a \end{aligned}}$$

Assoziativgesetz der Addition

Treten in einer Rechnung mehr als zwei Summanden auf, so können beliebige Teilsummen gebildet werden. Diese Eigenschaft wird als assoziativ bezeichnet.

gleich-benannte	ungleich-benannte
$7a$; $6a$; $3a$; $0{,}5a$	$6a$; $2c$; $7d$; $4e$

Koeffizienten

$$6a + 2a + a = (6 + 2 + 1)a = 9a$$

Beachte: a steht für $1 \cdot a$

$6x + 2x + 3y + 4y = 8x + 7y$

Nur gleichbenannte Zahlen addieren!

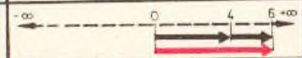
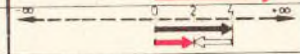
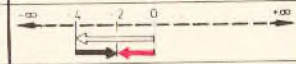
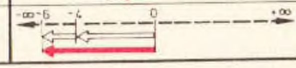
Addition von allgemeinen Zahlen

Dabei wird grundsätzlich zwischen gleichbenannten und ungleichbenannten Zahlen unterschieden. Zahlen, die vor den allgemeinen Zahlen stehen, werden als Beizahlen oder Koeffizienten bezeichnet.

Gleichbenannte Zahlen werden addiert, indem man ihre Koeffizienten addiert und ihre Benennung beibehält. Ein Addieren ungleichbenannter Zahlen ist nicht möglich.

1.2.1.1 Addieren in Q

In dem folgenden Abschnitt werden die Regeln des Addierens mit rationalen Zahlen erläutert, d. h., daß mit positiven und negativen Zahlen gerechnet wird. Es werden wegen der unterschiedlichen Vorzeichen vier Fälle voneinander unterschieden:

	Bestimmte Zahlen	Zahlengerade	Regeln (allgemeingültig in Q)
I.	$(+4) + (+2) = 4 + 2 = 6$		$(+a) + (+b) = a + b$
II.	$(+4) + (-2) = 4 - 2 = 2$		$(+a) + (-b) = a - b$
III.	$(-4) + (+2) = -4 + 2 = -2$		$(-a) + (+b) = -a + b$
IV.	$(-4) + (-2) = -4 - 2 = -6$		$(-a) + (-b) = -a - b$

Rechenzeichen
Vorzeichen

$+\ (+a) = +a$

$+\ (-a) = -a$

Sind Vor- und Rechenzeichen gleich, so entsteht ein positives, sind Vor- und Rechenzeichen ungleich, so entsteht ein negatives Rechenzeichen.

$$\begin{aligned} (+4) + (-9) &= +\ (+4) + (-9) \\ &= 4 - 9 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Es gilt:

Steht vor einer Zahl kein Vorzeichen, so ist das gleichbedeutend mit Plus (+).

Beispiele:

a) Zunächst sind die Klammern aufzulösen und dann die Summe zu berechnen.

$$\begin{aligned} &(-7) + (+3) + (-8) + (+10) \\ &= -7 + 3 - 8 + 10 \\ &= -2 \end{aligned}$$

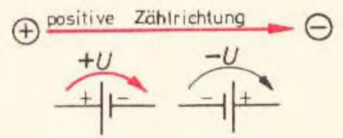
b) Werden allgemeine Zahlen addiert, löst man zuerst die Klammer auf und faßt zusammen.

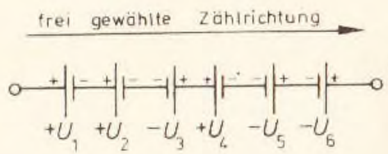
$$\begin{aligned} &(-5x) + (-x) + (+14x) \\ &= -5x - x + 14x \\ &= 8x \end{aligned}$$

c) Bei der Reihenschaltung von elektrischen Spannungsquellen ergibt die Summe aller Einzel- bzw. Teilspannungen die Gesamtspannung. Als positive Zählrichtung gilt für elektrische Spannungen die Richtung von Plus nach Minus. Weicht die tatsächliche Richtung einer Spannung von der vorher frei gewählten Richtung ab, so wird sie durch ein negatives Vorzeichen gekennzeichnet.

Zur Ermittlung der Gesamtspannung U müssen die Teilspannungen ($U_1 \ldots U_6$) unter Berücksichtigung des Vorzeichens (Zählrichtung) addiert werden.

Ergibt sich für die Summe ein negatives Vorzeichen, dann war die ursprünglich frei gewählte Richtung falsch.



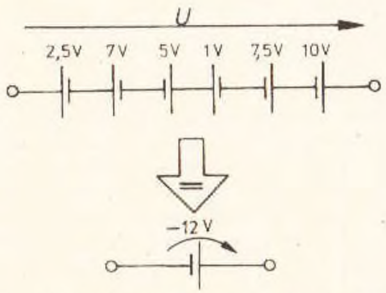


$$U = U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 - U_6$$

Das angegebene Schaltungsbeispiel soll mit folgenden Werten berechnet werden:

$U_1 = 2{,}5$ V; $U_2 = 7$ V; $U_3 = 5$ V;
$U_4 = 1$ V; $U_5 = 7{,}5$ V; $U_6 = 10$ V.

Die Rechnung ergibt eine Gesamtspannung $U = -12$ V; d. h., ihre tatsächliche Richtung ist entgegengesetzt zur vorher frei gewählten Zählrichtung.



$$U = (+2{,}5\text{ V}) + (+7\text{ V}) + (-5\text{ V}) + (+1\text{ V}) + (-7{,}5\text{ V}) + (-10\text{ V})$$
$$U = 2{,}5\text{ V} + 7\text{ V} - 5\text{ V} + 1\text{ V} - 7{,}5\text{ V} - 10\text{ V}$$
$$U = -12\text{ V}$$

d) Enthält eine Aufgabe mehr als eine allgemeine Zahl, so sind nur die gleichbenannten zusammenzufassen. Empfehlenswert ist es, am Ende der Berechnung die Buchstaben nach der alphabetischen Reihenfolge zu ordnen, um eine optimale Übersicht zu gewinnen.

$$(+2s) + (-3t) + (+5t) + (-7s) + (-r)$$
$$= 2s - 3t + 5t - 7s - r$$
$$= 2s - 7s - 3t + 5t - r$$
$$= -r - 5s + 2t$$

1.2.2 Gesetze der Subtraktion

$4 - 0 = 4$ $\boxed{a - 0 = a}$

Neutralelement

Neutralelement der Subtraktion

Subtrahiert man von einer beliebigen Zahl die Zahl 0, entspricht der Differenzwert stets dem Wert des Minuenden. Die Zahl 0 wird deshalb als Neutralelement der Subtraktion bezeichnet.

$4 - 3 \neq 3 - 4$ $\boxed{a - b \neq b - a}$

... ist ungleich ...

Bei der Subtraktion gilt nicht das kommutative Gesetz, d. h., daß Minuend und Subtrahend nicht vertauscht werden dürfen.

Da das kommutative und assoziative Gesetz in einem unmittelbaren Zusammenhang stehen, gilt auch hier nicht das assoziative Gesetz.

Subtraktion von allgemeinen Zahlen

Es dürfen nur gleichbenannte Zahlen subtrahiert werden.

$12b - 18x - 4b = 8b - 18x$

Beispiele:

$$\boxed{15r} + 22s - \boxed{7r} - 16s - \boxed{r}$$
$$= \boxed{15r - 7r - r} + (22s - 16s)$$
$$= \boxed{7r} + 6s$$

20 km − 5 km − 7 km = 8 km

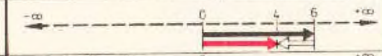
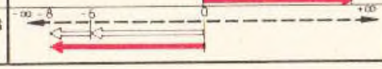
$17u - 3u - 7u - 16u = -9u$

Enthält eine Aufgabe mehr als eine allgemeine Zahl, so sind nur die gleichbenannten zusammenzufassen.

Ebenso wie bei der Addition werden die Koeffizienten zusammengefaßt (subtrahiert); die Benennung wird beibehalten.

1.2.2.1 Subtrahieren in *Q*

Wie bei der Addition werden nachfolgend die Regeln des Subtrahierens mit rationalen Zahlen erläutert. Wegen der unterschiedlichen Vorzeichen werden die folgenden vier Fälle unterschieden:

	Bestimmte Zahlen	Zahlengerade	Regeln (allgemeingültig in *Q*)
I.	$(+6) - (+2) = 6 - 2 = 4$		$(+a) - (+b) = a - b$
II.	$(-6) - (-4) = -6 + 4 = -2$		$(-a) - (-b) = -a + b$
III.	$(+6) - (-2) = 6 + 2 = 8$		$(+a) - (-b) = a + b$
IV.	$(-6) - (+2) = -6 - 2 = -8$		$(-a) - (+b) = -a - b$

Zusammenfassend für Addition und Subtraktion gilt die folgende Vorzeichenregel:

$+(+a) = +a$
$-(-a) = +a$
$+(-a) = -a$
$-(+a) = -a$

Sind Vor- und Rechenzeichen gleich, so entsteht ein positives, sind Vor- und Rechenzeichen dagegen ungleich, so entsteht ein negatives Rechenzeichen.

Beispiele:

a) In der nebenstehenden Aufgabe ist das Addieren und Subtrahieren gleichermaßen enthalten. Man spricht dann von einer sog. algebraischen Summe. Dabei sind nach der Vorzeichenregel Vor- und Rechenzeichen aufzulösen.

$$(-3) + (+4) - (-7) - (+8) + (-1)$$
$$= -3 \quad +4 \quad +7 \quad -8 \quad -1$$
$$= -1$$

b) Werden allgemeine Zahlen addiert und subtrahiert, löst man zuerst die Vorzeichen auf, faßt die Koeffizienten zusammen und behält die Benennung bei.

$$(-7x) - (-6x) + (+18x) - (+2x)$$
$$= -7x \quad +6x \quad +18x \quad -2x$$
$$= 15x$$

c) Nachdem die Vorzeichen aufgelöst wurden, wird geordnet, d. h., gleichbenannte Zahlen werden zur besseren Übersicht nebeneinandergeschrieben und zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} &(-3a) - (+2b) - (-4a) - (-b) \\ &= -3a \quad -2b \quad +4a \quad +b \\ &= -3a \quad +4a \quad -2b \quad +b \\ &= a - b \end{aligned}$$

$+5 - 5 = 0 \qquad x - x = 0$

$-7 + 7 = 0 \qquad -y + y = 0$

Da die Subtraktion die Umkehrung der Addition ist, muß bei Addition und Subtraktion derselben Zahl immer die Zahl 0 das Ergebnis dieser Rechenoperation sein.

Regel:

$\boxed{a - b + b = a}$

$20 - 11 + 11 = 20$

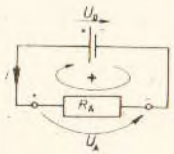
$5 - 3 + 3 = 5$

$5e + 7e - 7e = 5e$

Beispiel:

In einem Stromkreis ist die Summe aller Spannungen gleich 0. Dabei müssen die Spannungen vorzeichengerecht nach einer vorher festgelegten „positiven Richtung" addiert werden. Anstelle des Wortes „Summe" verwendet man in der Mathematik und Physik das sog. Summenzeichen.

Werden die Spannungen des oberen Schaltbildes addiert, wird deutlich, daß von der Gesamtspannung die gleiche Spannung des Verbrauchers subtrahiert wird (angenommen: verlustfreie Batterie).



$\boxed{\Sigma \text{ Summenzeichen}}$

Für einen Stromkreis gilt:

$\Sigma U = 0$

$\Sigma U = U_0 - U_A = 0$

1.2.3 Klammern in Verbindung mit der Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned} &56 + 77 - 46 + 23 \\ &= (56 - 46) + (77 + 23) \\ &= 10 + 100 \\ &= 110 \end{aligned}$$

Klammern geben auch Rechenhilfen!

Häufig enthält eine Aufgabe Klammern. Zur Berechnung ist diese Klammer, die in der Regel eine Zusammenfassung bestimmter Zahlen oder Größen darstellt, nach den bisher erarbeiteten Vorzeichenregeln aufzulösen.

Steht vor der Klammer ein (−), werden beim Auflösen der Klammer die Rechenzeichen in der Klammer umgekehrt; steht vor der Klammer jedoch ein (+), bleiben die Rechenzeichen in der Klammer erhalten.

$20 - (7 + 9) = 20 - 7 - 9 = 4$

$20 - (7 - 9) = 20 - 7 + 9 = 22$

$20 + (7 + 9) = 20 + 7 + 9 = 36$

$20 + (7 - 9) = 20 + 7 - 9 = 18$

$$\boxed{\begin{aligned} a - (b + c) &= a - b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c \\ a + (b + c) &= a + b + c \\ a + (b - c) &= a + b - c \end{aligned}}$$

Beispiele:

a) Nachdem die Klammer nach der Vorzeichenregel aufgelöst wurde, können die gleichbenannten Größen zusammengefaßt werden.

$$\begin{aligned} 6u - (4v + 3u) &= 6u - 4v - 3u \\ &= 6u - 3u - 4v \\ &= 3u - 4v \end{aligned}$$

b) Da es oftmals angenehmer ist, nur eine einzige Subtraktion durchzuführen, werden alle zu subtrahierenden Glieder zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} &19 \text{ km} - 5 \text{ km} - 1 \text{ km} - 11 \text{ km} \\ &= 19 \text{ km} - (5 \text{ km} + 1 \text{ km} + 11 \text{ km}) \\ &= 19 \text{ km} - 17 \text{ km} \\ &= 2 \text{ km} \end{aligned}$$

c) Enthält eine Aufgabe auch übergeordnete Klammern (eckige und geschweifte), so sind die Klammern immer von **innen nach außen** aufzulösen, d. h. die runden vor den eckigen und die eckigen vor den geschweiften.

$$\begin{aligned} &3 - [5a + (7 - 2a) - (6a - 37)] \\ &= 3 - [5a + 7 - 2a - 6a + 37] \\ &= 3 - 5a - 7 + 2a + 6a - 37 \\ &= 3a - 41 \end{aligned}$$

1.3 Multiplikation und Division

1.3.1 Gesetze der Multiplikation

Neutralelement der Multiplikation

Wird eine beliebige Zahl mit dem Faktor 1 multipliziert, entspricht das Produkt immer dem Wert der ursprünglichen Zahl. Die Zahl 1 ist demnach das Neutralelement der Multiplikation.

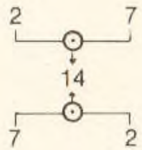
$5 \cdot 1 = 5 \qquad \boxed{a \cdot 1 = a}$

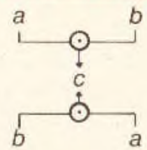
Neutralelement

Kommutatives Gesetz der Multiplikation

Für die Multiplikation gilt das kommutative Gesetz. D. h., die Reihenfolge der Faktoren hat keinen Einfluß auf den Wert des Produkts.

$2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 \qquad \boxed{a \cdot b = b \cdot a}$





Assoziatives Gesetz der Multiplikation

Besteht ein Produkt aus mehr als zwei Faktoren, so können beliebige Teilprodukte gebildet werden. Diese Eigenschaft wird als assoziativ bezeichnet.

$$\begin{aligned} &3 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= (3 \cdot 4) \cdot 5 \\ &= 12 \cdot 5 \\ &= 60 \\ &= (3 \cdot 5) \cdot 4 \\ &= 15 \cdot 4 \\ &= 60 \\ &= (4 \cdot 5) \cdot 3 \\ &= 20 \cdot 3 \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a \cdot b \cdot c \\ &= (a \cdot b) \cdot c \\ &= (a \cdot c) \cdot b \\ &= (b \cdot c) \cdot a \end{aligned}}$$

Es gilt die Vereinbarung, daß vor einer Klammer, zwischen zwei allgemeinen Zahlen und zwischen allgemeinen Zahlen und deren Koeffizienten das Multiplikationszeichen fortgelassen werden kann.

$$\begin{aligned} &3 \cdot (6 \cdot 7) \\ &= 3\,(6 \cdot 7) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a \cdot (c \cdot e) \\ &= a\,(ce) \end{aligned}}$$

$5 \cdot a = 5a$

Multiplikation mit der Zahl 0

$5 \cdot 0 = 0$

$5 \cdot 0 \cdot 16 = 0$

$\boxed{a \cdot 0 = 0}$

Ist in einem Produkt ein Faktor 0, so ist der Wert des Produktes selbst auch gleich 0.

1.3.1.1 Multiplizieren in *Q*

Werden rationale Zahlen multipliziert, so müssen deren Vorzeichen berücksichtigt werden. Dabei entstehen die folgenden vier Fälle:

	Bestimmte Zahlen	Regeln (allgemeingültig in *Q*)
I.	$(+5) \cdot (+7) = +(5 \cdot 7) = 35$	$(+a) \cdot (+b) = +(ab) = ab$
II.	$(-5) \cdot (+7) = -(5 \cdot 7) = -35$	$(-a) \cdot (+b) = -(ab) = -ab$
III.	$(+5) \cdot (-7) = -(5 \cdot 7) = -35$	$(+a) \cdot (-b) = -(ab) = -ab$
IV.	$(-5) \cdot (-7) = +(5 \cdot 7) = 35$	$(-a) \cdot (-b) = +(ab) = ab$

Das Produkt zweier Zahlen wird positiv, wenn deren Vorzeichen gleich sind. Es wird dagegen negativ, wenn deren Vorzeichen ungleich sind.

Beispiele:

a) Treten in einer Rechnung mehr als zwei rationale Zahlen auf, ist zunächst die Anzahl der negativen Vorzeichen zu überprüfen. Stellt sich dabei heraus, daß die Anzahl geradzahlig (2, 4, 6 . . .) ist, so ist der Produktwert positiv. Bildet die Summe der negativen Vorzeichen eine ungerade Zahl (1, 3, 5 . . .), ist der Produktwert stets negativ.

$$(-2)\,(+3)\,(-5)\,(+7) = +(\underbrace{2 \cdot 3}\cdot\underbrace{5 \cdot 7}) = +(6 \cdot 35) = 210$$

Zwei negative Vorzeichen; es entsteht ein positives Produkt!

$$(+4)\,(-3)\,(-5)\,(-2) = -(\underbrace{4 \cdot 3}\cdot\underbrace{5 \cdot 2}) = -(12 \cdot 10) = -120$$

Drei negative Vorzeichen; es entsteht ein negatives Produkt!

b) Werden allgemeine Zahlen multipliziert, verfährt man genauso wie unter a) beschrieben. Eine bessere Übersicht erhält man, indem die allgemeinen Zahlen nach der alphabetischen Reihenfolge geschrieben werden.

$$(-r)\,(+s)\,(-u)\,(+t) = +(rsut) = rstu$$

$$(-x)\,(-y)\,(-z)\,(+w) = -(xyzw) = -wxyz$$

c) Das Vorzeichen einer Zahl wird umgekehrt, wenn die Zahl mit (−1) multipliziert wird.

$5 \cdot (-1) = -5$ $\qquad a \cdot (-1) = -a$

d) Besteht ein Produkt aus allgemeinen Zahlen und Koeffizienten, so wird wie folgt vorgegangen:
- Vorzeichen des Produktes ermitteln;
- Produkt der Koeffizienten bilden und
- mit dem Produkt der allgemeinen Zahlen multiplizieren.

$$(-2g)\,(-4h)\,(+6i)\,(-5j)$$
$$= -(2g \cdot 4h \cdot 6i \cdot 5j)$$
$$= -(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5ghij)$$
$$= -240ghij$$

e) Dezimalbrüche werden zunächst ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt streicht man von rechts nach links soviel Dezimalstellen ab, wie die Faktoren zusammen besitzen.

1,23 0,75 1,01 10,007 — Dezimalbrüche

$0{,}1 \cdot 12 = 1{,}2 \qquad 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

$0{,}002 \cdot 0{,}19 = 0{,}00038 \qquad 10 \cdot 0{,}7 = 7$

f) In einer physikalischen Formel werden den Formelzeichen Größen zugeordnet. Da diese Größen aus Zahlenwert und Einheit bestehen, müssen auch die Einheiten in die Berechnung einbezogen werden. Dabei werden die Einheiten genauso behandelt wie allgemeine Zahlen, d. h., auch sie werden multipliziert.

$$W = F \cdot s$$
$$W = 10\ \mathrm{N} \cdot 120\ \mathrm{m}$$
$$W = 1200 \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$
$$W = 1200\ \mathrm{Nm}$$

g) Oftmals wird aus zusammengesetzten Einheiten eine neue Einheit gebildet. In diesem Fall entspricht $1\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\ \mathrm{N}$.

$$F = m \cdot a$$
$$F = 120\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$F = 1177{,}2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$F = 1177{,}2\ \mathrm{N}$$

1.3.1.2 Distributivgesetz (Multiplikation einer Summe mit einer Zahl)

$$\boxed{2\,(s + t)} = (s + t) + (s + t) = s + t + s + t = \boxed{2s + 2t}$$

$$2\,(s\ \boxed{+\ t}) = 2s\ \boxed{+\ 2t}$$

Das Produkt 2 (*s* + *t*) besteht aus den Faktoren 2 und (*s* + *t*), wobei der letztere eine Summe darstellt. Das Produkt läßt sich berechnen, indem jeder Summand der Summe vorzeichengerecht mit dem Faktor multipliziert wird.

$$(a \pm b)\,\boxed{c} = a \cdot \boxed{c} \pm b \cdot \boxed{c}$$

Distributivgesetz: Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem jeder Summand der Summe nach den Vorzeichenregeln mit der Zahl multipliziert wird.

Beispiele:

a) Man achte hierbei besonders auf die Vorzeichen!

$a\,(-3 - 6b) = -3a - 6ab$

b) Enthält die Summe mehr als zwei Summanden, dann gilt auch in diesem Fall das Distributivgesetz: Es ist jeder Summand mit dem Faktor zu multiplizieren.

$5a\,(6b - 7a + 2a^2 - 12b^2)$
$= 30ab - 35a^2 + 10a^3 - 60ab^2$

$(3 + x)\,(4 + y) = ?$

$$(3 + x)\,\boxed{(4 + y)} = 3\,\boxed{(4 + y)} + x\,\boxed{(4 + y)}$$

$= 3 \cdot 4 + 3y + 4x + xy$
$= 12 + 3y + 4x + xy$

Eine weitere Anwendung des Distributivgesetzes ist die Multiplikation zweier Klammerausdrücke.

Dabei wird zunächst jeder Summand des ersten Klammerausdrucks mit dem gesamten zweiten Klammerausdruck multipliziert. Anschließend wird das Distributivgesetz noch einmal angewendet und jeder Summand des zweiten Klammerausdrucks mit dem jeweils davorstehenden Faktor multipliziert.

$$(3 + x)\,(4 + y) = 12 + 3y + 4x + xy$$

Anstatt schrittweise vorzugehen, ist es aber auch möglich, jeden Summanden des ersten mit jedem Summanden des zweiten Klammerausdrucks zu multiplizieren.

$(a+b)\,(c+d) = ac+ad+bc+bd$

Zwei algebraische Summen lassen sich miteinander multiplizieren, indem jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln multipliziert wird.

Beispiele:

a) Nach der Regel ist vorzeichengerecht zu multiplizieren.

$(s - 3t)\,(-4 + 5t) = -4s + 5st + 12t - 15t^2$

b) Steht vor den beiden Klammern ein negatives Vorzeichen, so kann das Produkt auf zwei Arten berechnet werden.

$-(3x + 6)\,(7x - 8)$

1. Negatives Vorzeichen in **eine** Klammer hineinbringen.

$= (-3x - 6)\,(7x - 8)$
$= -21x^2 + 24x - 42x + 48$

2. Erst multiplizieren und dann die Vorzeichen umkehren.

$= -(21x^2 - 24x + 42x - 48)$
$= -21x^2 + 24x - 42x + 48$
$= -21x^2 - 18x + 48$

Niemals in beide Klammern das negative Vorzeichen hineinbringen!

c) Sollen zwei algebraische Summen mit einem Faktor multipliziert werden, dann gilt auch hier:

$(2a - 6)\,(4b - 7)\,(-5)$ bessere
$= -5\,(2a - 6)\,(4b - 7)$ Schreibweise!

1. Entweder **eine** Klammer mit dem Faktor multiplizieren,

$= (-10a + 30)\,(4b - 7)$
$= -40ab + 70a + 120b - 210$

oder

2. erst das Produkt beider Klammern berechnen und dann mit dem Faktor multiplizieren.

$= -5\,(8ab - 14a - 24b + 42)$
$= -40ab + 70a + 120b - 210$

Niemals beide Klammern mit dem Faktor malnehmen (Assoziativgesetz = Bildung von Teilprodukten).

Vergleich:
$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3)\,4 = (2 \cdot 4)\,3 = (3 \cdot 4)\,2$
$= 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 24$

Binom = zweigliedriger Ausdruck

In den nachfolgenden Beispielen werden zwei Summen miteinander multipliziert, die in der Mathematik eine besondere Bedeutung haben; es handelt sich um die sog. Binome.

d) **1. binomische Formel**

$(a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$
$= \boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

e) **2. binomische Formel**

$(a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$
$= \boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

f) **3. binomische Formel**

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$
$\boxed{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$

g) Steht vor den Binomen ein negatives Vorzeichen, so entfällt es, da $(-)\,(-) = +$ ergibt.

$-(a + b)^2 = -(a + b) \cdot -(a + b)$
$= +(a + b)^2$

$-(a - b)^2 = -(a - b) \cdot -(a - b)$
$= +(a - b)^2$

$\boxed{(a - b)^2 = (b - a)^2}$

Daraus folgt:
$= (b - a) \cdot (b - a) = a^2 + b^2 - 2ab$

Begründung: Die quadratischen Glieder sind immer positiv.

h) Da es sich bei der dritten binomischen Formel nicht um einen quadratischen Ausdruck handelt, wird das negative Vorzeichen mit in **eine** Klammer übernommen.

$$-(a+b)(a-b) = (-a-b)(a-b)$$
$$= -a^2 + ab - ab + b^2$$
$$= -a^2 + b^2$$
$$= b^2 - a^2$$

Daraus folgt: $\boxed{-(a^2 - b^2) = b^2 - a^2}$

i) Steht vor einer zu quadrierenden Summe ein Faktor, muß erst quadriert und dann die daraus entstehende Summe mit dem Faktor multipliziert werden. Der Beweis dieser Behauptung liegt wiederum im Assoziativgesetz begründet; wird nämlich das Binom zerlegt, darf man den Faktor nur mit einem Klammerausdruck multiplizieren.

$$5(7a-x)^2 = 5(49a^2 - 14ax + x^2)$$
$$= 245a^2 - 70ax + 5x^2$$

$$5(7a-x)^2 = 5(7a-x)(7a-x)$$
$$= (35a - 5x)(7a - x)$$
$$= 245a^2 - 35ax - 35ax + 5x^2$$
$$= 245a^2 - 70ax + 5x^2$$

k) Enthält eine Klammer mehr als zwei Summanden, gilt ebenfalls das Distributivgesetz:

Jeder Summand der ersten Summe ist mit jedem Summand der zweiten Summe zu multiplizieren.

$$(5a - 6b + x)(3 + 5y)$$
$$= 5a \cdot 3 + 5a \cdot 5y - 6b \cdot 3 - 6b \cdot 5y + x \cdot 3 + x \cdot 5y$$
$$= 15a + 25ay - 18b - 30by + 3x + 5xy$$

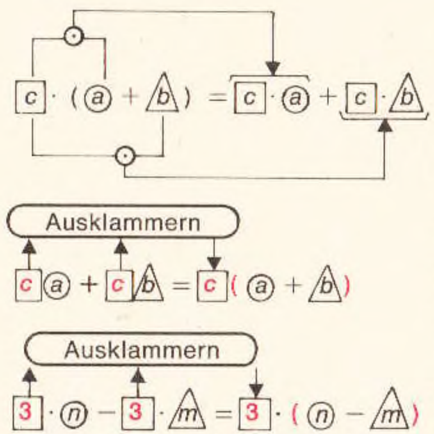
l) Wenn ein Produkt aus drei algebraischen Summen besteht, dann werden erst zwei Summen berechnet und anschließend die dritte Summe mit der zuerst entstandenen Summe multipliziert.

$$(7r - s)(8 - s)(6 + r)$$
$$= (56r - 7rs - 8s + s^2)(6 + r)$$

Schließlich wird geordnet und zusammengefaßt.

$$= 336r + 56r^2 - 42rs - 7r^2s - 48s - 8rs + 6s^2 + s^2r$$
$$= 56r^2 + 6s^2 - 7r^2s + s^2r - 50rs + 336r - 48s$$

1.3.1.3 Ausklammern



Nach dem Distributivgesetz multipliziert man eine Summe mit einer Zahl, indem jeder Summand in der Summe mit dem Faktor multipliziert wird.

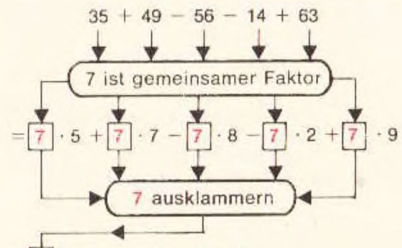
Wenn dieses Gesetz gilt, dann muß auch die Umkehrung gelten; d. h., es muß die Klammer wieder eingeführt werden können. Diesen Vorgang nennt man Ausklammern. Beim Ausklammern wird der gemeinsame Faktor einer Summe vor die Klammer geschrieben und die Summe, selbstverständlich ohne den gemeinsamen Faktor, in einer Klammer zusammengefaßt.

$$ax - bx + cx = x(a - b + c)$$

Enthalten alle Summanden einer Summe einen gemeinsamen gleichen Faktor, dann kann dieser ausgeklammert werden. Da aus der Summe ein Produkt entstanden ist, nennt man diesen Vorgang auch Faktorenzerlegung.

Beispiele:

a) Ausklammern erleichtert das Rechnen. In dieser Summe ist jeder Summand ein Vielfaches der Zahl 7. D. h., die Zahl 7 ist selbst gemeinsamer Faktor und kann ausgeklammert werden.



$$= \boxed{7}(5 + 7 - 8 - 2 + 9)$$
$$= 7 \cdot 11 = 77$$

b) Hier wird sehr deutlich, daß x der gemeinsame Faktor ist und ausgeklammert werden kann.

$$7x + 8x - 9x - 20x + 11x$$
$$= x(7 + 8 - 9 - 20 + 11)$$
$$= x(-3)$$
$$= -3x$$

c) Die Gesamtspannung U eines Stromkreises ist die Summe aller Teilspannungen. Da durch alle Widerstände einer Reihenschaltung derselbe Strom I fließt, kann dieser ausgeklammert werden.

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + I \cdot R_4$$
$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

d) Oftmals empfiehlt es sich auch, einen negativen Faktor auszuklammern. Dabei ist unbedingt auf die Vorzeichenregeln zu achten.

$$-ab - ac - ad$$

ist dasselbe wie: $= (-a)b + (-a)c + (-a)d$

$$= (-a)(b + c + d)$$

Im Zweifelsfall sollte eine Probe durchgeführt werden. Bei einer solchen „Zurückrechnung" muß immer die ursprüngliche Summe wieder herauskommen.

$$(-a)(b + c + d) = -ab - ac - ad$$

e) Der gemeinsame Faktor kann auch selbst eine Summe sein. In diesem Fall muß die Summe (in Klammern) ausgeklammert werden.

$$3(x - y) - 5(x - y)$$
$$= (x - y)(3 - 5)$$
$$= (-2)(x - y)$$

f) Häufig können die nach dem Ausklammern entstandenen Summen nochmals ausgeklammert werden.

$20 + 5y - 8x - 2xy$

$= 5 \cdot 4 + 5y - 2x\, 4 - 2x\, y$

$= 5\,\boxed{(4+y)} - 2x\,\boxed{(4+y)}$

$= \boxed{(4+y)}\,(5 - 2x)$

g) Kommt der gemeinsame Faktor selbst nur als Summand vor, so erscheint er in der Klammer als 1 wieder.

$5sr - 3st + s - su$

$= s\,5r - s\,3t + s\,1 - s\,u$

$= s\,(5r - 3t + 1 - u)$

h) Die nebenstehende Aufgabe zeigt, daß durch das Einfügen einer neuen Klammer (mittels Vorzeichenumkehrung) ausgeklammert werden kann.

$7b\,(x + 5) - x - 5$

$= 7b\,\boxed{(x+5)} - \boxed{(x+5)}$

$= 7b\,\boxed{(x+5)} - 1\,\boxed{(x+5)}$

$= \boxed{(x+5)}\,(7b - 1)$

i) Lösungsgang:

$8x\,(s - t) + (a + b)\,(t - s)$

1. Werden die Summanden in der rechten Klammer unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln umgekehrt, kann die Summe ausgeklammert werden. Setzt man vor das zweite Produkt ein negatives Vorzeichen, müssen gleichzeitig **in einer** Klammer auch die Vorzeichen umgekehrt werden, um die ursprüngliche Form beizubehalten.

Beachte: $\boxed{\begin{aligned} +\,(t - s) &= -(-t + s) \\ &= -(\ \ s - t) \end{aligned}}$

Für das rechte Produkt gilt:

$\boxed{\begin{aligned} &+(a + b)\,(t - s) \\ = &-(a + b)\,(s - t) \end{aligned}}$

Die Aufgabe lautet jetzt:

$8x\,\boxed{(s-t)} - (a + b)\,\boxed{(s-t)}$

2. Nach dieser Umstellung kann der gemeinsame Faktor $(s - t)$ ausgeklammert werden. Man beachte jedoch, daß vor der Klammer $(a + b)$ ein negatives Vorzeichen steht. Demzufolge muß eine übergeordnete (eckige) Klammer geschrieben werden.

$= \boxed{(s-t)} \cdot [8x - (a + b)]$

3. Die eckige Klammer wird unter der Berücksichtigung der Vorzeichen aufgelöst.

$= (s - t) \cdot (8x - a - b)$

1.3.2 Gesetze der Division

$6 : 2 = \frac{6}{2} = 3$ $\boxed{a : b = \frac{a}{b}}$

$\text{Bruch} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

Schreibweise der Division

Neben dem Divisionszeichen (:) gibt es noch die Möglichkeit, eine Division durch einen Bruch darzustellen. Dabei wird die Zahl über dem Bruchstrich als Zähler und die unter dem Bruchstrich als Nenner bezeichnet.

$7 : 1 = 7$

$6x : 1 = 6x$ $\boxed{a : 1 = a}$

Neutralelement

Neutralelement der Division

Der Wert des Dividenden bleibt erhalten, wenn er durch die Zahl 1 dividiert wird. Damit wird die Zahl 1 als Neutralelement der Division bezeichnet.

$12 : 4 \neq 4 : 12$ $\boxed{a : b \neq b : a}$

Kommutatives und assoziatives Gesetz haben für die Division keine Gültigkeit, da Dividend und Divisor nicht austauschbar sind.

$0 : 15 = 0$

$0 : 7x = 0$ $\boxed{0 : a = 0}$

Division durch die Zahl 0

- Ist der Dividend 0 und der Divisor ungleich 0, so ist der Quotient selbst auch 0.
- Der Quotient einer Division durch 0 ergibt Unendlich (∞). Dabei ist zu beachten, daß der Wert Unendlich nicht eindeutig zu definieren ist, da jede rationale Zahl noch einen Nachfolger hat.

praxisgerecht:

$I = \frac{U}{R}$ wenn $R = 0$, gilt als Vereinbarung:

$\boxed{I = \frac{U}{0\,\Omega} = \infty\ \text{A (Kurzschluß)}}$

$I = \frac{U}{R}$ wenn $R = \infty$, gilt:

$\boxed{I = \frac{U}{\infty\,\Omega} = 0\text{A (geöffneter Schalter)}}$

Division durch Unendlich

Der Wert des Quotienten beträgt dann 0.

1.3.2.1 Dividieren in *Q*

Beim Dividieren in *Q* müssen wegen der unterschiedlichen Vorzeichen vier verschiedene Fälle untersucht werden:

	Bestimmte Zahlen	Regeln (allgemeingültig in *Q*)
I.	$(+12) : (+3) = +(12 : 3) = 4$	$(+a) : (+b) = +(a : b) = \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$
II.	$(+12) : (-3) = -(12 : 3) = -4$	$(+a) : (-b) = -(a : b) = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$
III.	$(-12) : (+3) = -(12 : 3) = -4$	$(-a) : (+b) = -(a : b) = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$
IV.	$(-12) : (-3) = +(12 : 3) = 4$	$(-a) : (-b) = +(a : b) = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Der Quotient zweier Zahlen ist positiv, wenn deren Vorzeichen gleich sind. Er ist dagegen negativ, wenn deren Vorzeichen ungleich sind.

$$-\frac{20}{5} = \frac{-20}{5} = \frac{20}{-5} = -4$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$-\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(b-a)} = \frac{a-b}{-b+a} = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

Negatives Vorzeichen in den Nenner!

Klammer aufgelöst und die positive Zahl nach vorne geschrieben!

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Quotienten unter II. und III. vollkommen identisch sind, obwohl die Voraussetzungen verschiedener Art sind. Es ist demnach vollkommen gleichgültig, ob das negative Vorzeichen vor dem Bruch, im Nenner oder im Zähler steht – der Wert des Bruches verändert sich nicht!

Beispiele:

a) Benannte Zahlen werden dividiert, indem die Koeffizienten und die allgemeinen Zahlen je für sich dividiert werden.

$$12a : 3a = \frac{12a}{3a} = 4$$

$$18b : 6a = \frac{18b}{6a} = \frac{3b}{a}$$

b) Man bereitet die Division zweier Dezimalbrüche vor, indem zuerst in beiden das Komma um so viele Stellen nach rechts gerückt wird, wie der Divisor besitzt. Dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl.

```
     0,34 : 2,5
oder 3,4  : 25 = 0,136
     2 5
     ---
       90
       75
       ---
       150
       150
       ---
         0
```

c) Geht die Division zweier Zahlen nicht auf, muß gerundet werden. Dabei sind folgende Grundregeln zu beachten:

- Wichtig ist die Angabe, auf wieviele Stellen nach dem Komma gerechnet werden soll. Je größer die Anzahl der Stellen nach dem Komma, um so genauer ist ein Wert.
- Es wird immer um eine Stelle weitergerechnet, als gefordert.
- Ist die letzte Stelle nach dem Komma größer oder gleich 5, wird aufgerundet; ist sie dagegen kleiner als 5, wird abgerundet.

Beachte: 3,000 m ist genauer als 3,0 m

Mögliche Toleranz:	2,9995 m bis 3,000499 m	2,95 m bis 3,0499 m
	2 Stellen …	3 Stellen nach dem Komma
	5,537 m	121,7834 kg
	aufrunden	abrunden
	5,54 m	121,783 kg

d) In physikalischen Formeln werden auch die Einheiten dividiert. Durch die Division von Einheiten entsteht oftmals eine neue, abgeleitete Einheit.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{A}} = 22 \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 22\ \Omega$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{100\ \mathrm{As}}{2000\ \mathrm{V}} = 0{,}05 \cdot \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = 0{,}05\ \mathrm{F}$$

e) Werden innerhalb einer Aufgabe Kettenrechnungen verlangt, muß immer der Reihe nach vorgegangen werden, da bei der Division bekanntlich das Assoziativgesetz keine Gültigkeit hat.

$$\begin{aligned} &(-200) : (+5) : (-10) : (-4) \\ &= -(\underbrace{200 : 5} : 10 : 4) \\ &= -(\underbrace{40 : 10} : 4) \\ &= -(4 : 4) \\ &= -1 \end{aligned}$$

1.3.3 Erweitern und Kürzen von Brüchen

$$25 : 4 = \frac{25}{4};\ 6a : 7b = \frac{6a}{7b}$$

Bekanntlich kann jede Divisionsaufgabe auch in Form eines Bruches geschrieben werden. Dabei unterscheidet man zwischen einem:

Zähler ist kleiner als der Nenner	z. B. $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{88}{89}$	**echten Bruch**
Zähler ist größer als der Nenner	z. B. $\frac{7}{5}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{45}{2}$	**unechten Bruch**
Zähler = 1, beliebiger Nenner	z. B. $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{a}$	**Stammbruch**
beliebiger Zähler, dekadischer Nenner	z. B. $0{,}25 = \frac{25}{100}$	**Dezimalbruch**

$$0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$$

$$1{,}45 = \frac{145}{100} = \frac{29}{20}$$

$$0{,}4a = \frac{4a}{10} = \frac{2a}{5}$$

Dezimalbrüche besitzen einen dekadischen Nenner. Die Anzahl der Nullen im Nenner gibt an, um wieviel Stellen das Komma im Zähler nach links zu rücken ist.

$\frac{1}{3}$ ist genauer als $0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$
gelesen: 0,3-Periode

$\frac{20}{9}$ ist genauer als $2{,}2222\ldots = 2{,}\overline{2}$
gelesen: 2,2-Periode

Man beachte, daß die Angabe eines Bruches oftmals genauer ist als das Ergebnis der Division. Es ist deshalb ratsam, innerhalb von Berechnungen den Wert des Bruches bestehen zu lassen.

$3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$ und nicht! $3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$

$6\frac{1}{8} = \frac{49}{8}$ und nicht! $6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

Die sogenannten gemischten Zahlen sollen während einer Rechnung – um Fehler zu vermeiden – in einen unechten Bruch umgewandelt werden. Die Aussage einer gemischten Zahl ist zweideutig, da im allgemeinen vor Bruchstrichen das Multiplikationszeichen fortgelassen werden kann.

1.3.3.1 Erweitern von Brüchen

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit derselben Zahl, verändert sich zwar die Form des Bruches, aber nicht dessen Wert. Dieser Vorgang wird als Erweiterung bezeichnet; die Zahl, mit der Zähler und Nenner des Bruches multipliziert werden, heißt Erweiterungszahl.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{ac}{bc}$$

Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Erweiterungszahl multipliziert werden. Dabei ändert sich zwar die Form des Bruches, aber nicht dessen Wert.

Beispiele:

a) Der Bruch $\frac{11}{20}$ soll mit der Zahl 5 erweitert werden. Dabei sind Zähler und Nenner mit 5 zu multiplizieren.

$$\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{55}{100}$$

b) Brüche werden z. B. erweitert, um sie auf einen gewünschten Nenner zu bringen. Die Erweiterungszahl findet man, indem der neue Nenner durch den alten Nenner dividiert wird. Anschließend sind Zähler und Nenner mit der Erweiterungszahl zu multiplizieren. Man erhält so einen Bruch mit dem gewünschten Nenner.

$$\frac{5}{7} = \frac{?}{28}$$

$$\boxed{\text{neuer Nenner} : \text{alten Nenner} = \text{Erweiterungszahl}}$$

$$28 : 7 = 4$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$$

c) Der nebenstehende Bruch soll auf den Nenner $15ab^2$ gebracht werden. Dividiert man den neuen durch den alten Nenner, erhält man die Erweiterungszahl.

$$\frac{3a}{5b} = \frac{?}{15ab^2}$$

Erweiterungszahl: $15ab^2 : 5b = \boxed{3ab}$

$$\frac{3a}{5b} = \frac{3a \cdot \boxed{3ab}}{5b \cdot \boxed{3ab}} = \frac{9a^2b}{15ab^2}$$

d) Der Nenner des neuen Bruches soll den Wert $a^2 - b^2$ erhalten. Dabei ist der neue Nenner zuerst in Faktoren zu zerlegen, d. h., es muß ein Produkt entstehen. Anstelle von $a^2 - b^2$ kann auch $(a + b)(a - b)$ geschrieben werden (dritte binomische Formel).

$$\frac{6a}{a+b} = \frac{?}{a^2 - b^2} = \frac{?}{(a+b)(a-b)}$$

Erweiterungszahl: $(a+b)(a-b) : (a+b) = \boxed{(a-b)}$

$$\frac{6a}{a+b} = \frac{6a \cdot \boxed{(a-b)}}{(a+b) \cdot \boxed{(a-b)}} = \frac{6a^2 - 6ab}{a^2 - b^2}$$

$$\boxed{\text{Klammer nicht vergessen!}}$$

(Ein Bruchstrich hat zusätzlich die gleiche Bedeutung wie eine Klammer.)

e) Um die Erweiterungszahl zu finden, muß im alten Nenner zunächst ausgeklammert werden. Anschließend wird die Erweiterungszahl ermittelt und der ursprüngliche Bruch erweitert.

$$\frac{y}{4x + 2} = \frac{y}{2(2x + 1)} = \frac{?}{10(2x + 1)}$$

Erweiterungszahl: $10(2x+1) : 2(2x+1) = 5$

$$\frac{y}{4x + 2} = \frac{y \cdot 5}{2(2x+1) \cdot 5} = \frac{5y}{10(2x+1)}$$

f) Die Berechnung des Teilwiderstandes einer Parallelschaltung ergab den nebenstehenden Ausdruck. Dieser Bruch ist nun so umzuformen, daß der negative Zähler verschwindet. Um einen Vorzeichenwechsel zu erreichen, müssen Zähler und Nenner mit (-1) erweitert werden.

$$R_1 = \frac{-R_g R_2}{R_g - R_2}$$

$$= \frac{-R_g R_2 \cdot \boxed{(-1)}}{(R_g - R_2) \cdot \boxed{(-1)}}$$

$$= \frac{R_g R_2}{-R_g + R_2} = \frac{R_2 R_g}{R_2 - R_g}$$

1.3.3.2 Kürzen von Brüchen

Enthalten Zähler und Nenner gemeinsame Faktoren, dann besteht die Möglichkeit, Zähler und Nenner durch den gemeinsamen Faktor zu dividieren. Diese Rechenoperation wird als Kürzen bezeichnet.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner des Bruches durch einen gemeinsamen gleichen Faktor dividiert werden.

Beispiele:

a) Zähler und Nenner enthalten als gleichen Faktor die Zahl 9.

$$\frac{18}{45} = \frac{2 \cdot \cancel{9}}{5 \cdot \cancel{9}} = \frac{2}{5}$$

Eine andere Schreibweise ergibt sich, wenn Zähler und Nenner durchgestrichen, durch den gemeinsamen Faktor dividiert und das Ergebnis hingeschrieben wird.

$$\frac{\cancel{18}^{\,2}}{\cancel{45}_{\,5}} = \frac{2}{5}$$

b) Da hier die allgemeine Zahl a der gemeinsame Faktor ist, kann a gekürzt werden.

$$\frac{\cancel{a}bc}{3\cancel{a}de} = \frac{bc}{3de}$$

c) Zähler und Nenner enthalten als gemeinsamen Faktor die Zahl $5a$.

$$\frac{5a^2}{30a} = \frac{a \cdot \cancel{5a}}{6 \cdot \cancel{5a}} = \frac{a}{6}$$

d) Kann der gesamte Nenner gekürzt werden, entsteht eine ganze Zahl.

$$\frac{12sy}{3s} = \frac{4y \cdot \cancel{3s}}{\cancel{3s}} = \frac{4y}{1} = 4y$$

Hier darf nicht gekürzt werden!

$$\frac{3+4}{3-4};\ \frac{a^2+b^2}{a+b};\ \frac{5a-2b}{5-2}$$

$$\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2};\ \frac{a+b}{a-b};\ \frac{3a+4b+2c}{a+b+c}$$

Wie bereits ausgesagt wurde, dürfen nur gleiche Faktoren des Zählers und Nenners gekürzt werden.

Bestehen Zähler und Nenner aus einer Summe – auch wenn sie die gleichen Summanden enthält –, darf niemals gekürzt werden.

Keine Summen kürzen!

$$\frac{3+6}{6-3}=\frac{3\,(1+2)}{3\,(2-1)}=\frac{3}{1}=3$$

Ausnahmen bestehen jedoch dann, wenn die Summen im Zähler und Nenner gleiche Faktoren aufweisen. In diesem Fall muß man Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen (ausklammern, Produkte bilden).

Beispiele:

a) Zähler und Nenner enthalten als gemeinsamen Faktor die Zahl 5. Die Zahl 5 wird ausgeklammert und kann gekürzt werden.

$$\frac{35x-25}{15x+5}=\frac{\cancel{5}(7x-5)}{\cancel{5}(3x+1)}=\frac{7x-5}{3x+1}$$

b) Bei der Berechnung einer Reihenschaltung von Widerständen ergab sich die nebenstehende Formel. Der Strom I wird im Zähler ausgeklammert und kann gekürzt werden.

$$R_g=\frac{I\cdot R_1+I\cdot R_2+I\cdot R_3}{I}$$

$$R_g=\frac{\cancel{I}(R_1+R_2+R_3)}{\cancel{I}}$$

$$R_g=R_1+R_2+R_3$$

c) x ist gemeinsamer Faktor im Zähler und Nenner. Durch Kürzen entsteht im Zähler die Zahl 1!

$$\frac{x}{5x+6x}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(5+6)}=\frac{1}{11}$$

d) Lösungsgang:

1. Das negative Vorzeichen kann im Zähler, im Nenner oder vor dem Bruch stehen. In diesem Fall bringt man es in den Nenner. (Klammer nicht vergessen!)

$$-\frac{a-b}{b-a}=\frac{a-b}{-(b-a)}$$

2. Auflösen der Klammer.

$$=\frac{a-b}{-b+a}$$

3. Vertauschen der Summanden im Nenner.

$$=\frac{a-b}{a-b}$$

4. Diese Summen können in Produkte mit dem Faktor 1 umgewandelt werden. Die gesamte Summe wird gekürzt, da sie nun ein Faktor geworden ist.

$$=\frac{1\,(a-b)}{1\,(a-b)}=1$$

e) Wird die Potenz im Zähler als Produkt geschrieben, ist ersichtlich, daß $(a+b)$ gekürzt werden kann. Hier noch einmal der Hinweis, daß eine Klammer wie ein zusammengehöriger Ausdruck anzusehen ist, in diesem Fall also als Faktor.

$$\frac{(a+b)^2}{a+b}=\frac{(a+b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}}=a+b$$

f) Zähler und Nenner können mit Hilfe der binomischen Formeln in ein Produkt umgewandelt werden.

$$\frac{25+10x+x^2}{25-x^2}=\frac{(5+x)^2}{(5+x)\,(5-x)}=\frac{\cancel{(5+x)}\,(5+x)}{\cancel{(5+x)}\,(5-x)}=\frac{5+x}{5-x}$$

g) Im Gegensatz zu Beispiel f) besteht hier die Möglichkeit, noch einen weiteren Faktor auszuklammern.

$$\frac{7s^2-14s+7}{7s^2-7}=\frac{\cancel{7}(s^2-2s+1)}{\cancel{7}(s^2-1)}=\frac{(s-1)^{\cancel{2}}}{(s+1)\cancel{(s-1)}}=\frac{s-1}{s+1}$$

1.3.4 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

1.3.4.1 Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

$$\underbrace{\frac{1}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{7}{5};\ \frac{-6}{5}\qquad \frac{1}{s};\ \frac{2}{s};\ \frac{7}{s};\ \frac{-6}{s}}_{\text{gleichnamige Brüche}}$$

Weisen in einer Aufgabe Brüche die gleichen Nenner auf, werden sie als gleichnamig bezeichnet.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}\qquad \frac{1}{s}+\frac{2}{s}=\frac{1+2}{s}=\frac{3}{s}$$

Die nebenstehende Addition zeigt bereits, wie zu verfahren ist; man addiert bzw. subtrahiert, indem der Zähler addiert bzw. subtrahiert und der Nenner beibehalten wird.

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}$$

Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem die Zähler bei unverändertem Nenner addiert oder subtrahiert werden.

Beispiele:

a) Nachdem addiert bzw. subtrahiert wurde, kann noch gekürzt werden.

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}-\frac{4}{8}=\frac{5+3-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

b) Stehen im Zähler allgemeine Zahlen, dann gelten auch hier die Gesetze der Addition bzw. Subtraktion.

$$\frac{6a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{7c}{b} = \frac{6a - a + 7c}{b} = \frac{5a + 7c}{b}$$

c) Enthalten die Zähler Summen, so ist immer darauf zu achten, daß ein Bruchstrich zusätzlich die gleiche Bedeutung wie eine Klammer besitzt. Die Vorzeichenregeln müssen entsprechend berücksichtigt werden.

$$\frac{u - v}{10} - \frac{u + v}{10} = \frac{(u - v) - (u + v)}{10} = \frac{u - v - u - v}{10} = \frac{-2v}{10} = -\frac{v}{5}$$

1.3.4.2 Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$$

Die Addition ist so nicht durchführbar.

Folgerung: gleichnamig machen!

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Wenn ungleichnamige Brüche, also Brüche mit verschiedenen Nennern, addiert bzw. subtrahiert werden sollen, dann müssen sie zunächst gleichnamig gemacht werden. Dadurch erhalten die Brüche einen gemeinsamen gleichen Nenner – auch **Hauptnenner** (Kurzzeichen: HN) genannt. – Im Hauptnenner müssen alle Nenner als Faktor enthalten sein.

Ungleichnamige Brüche müssen, bevor man sie addiert bzw. subtrahiert gleichnamig gemacht werden. Dabei bringt man sie auf einen gemeinsamen gleichen Nenner, der als Hauptnenner (HN) bezeichnet wird.

Menge P der Primzahlen:

P = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...}

Für die Ermittlung des Hauptnenners sind die sog. Primfaktoren bzw. Primzahlen wichtig. Deshalb soll an dieser Stelle kurz der Begriff der Primzahl erklärt werden.

② → 2 : 2 = $\boxed{1}$ 2 : 1 = $\boxed{2}$

③ → 3 : 3 = $\boxed{1}$ 3 : 1 = $\boxed{3}$

verschiedene Quotienten

Primfaktoren oder Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind.

① → 1 : 1 = $\boxed{1}$ 1 : 1 = $\boxed{1}$

gleiche Quotienten

Die Zahl 1 ist selbst keine Primzahl.

Schrittweise vorgehen:

$$33 = 11 \cdot 3$$
$$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2$$
$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$
$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Wenn ein Ausdruck in Primfaktoren zerlegt werden soll, dann haben allgemeine Zahlen und Klammerausdrücke die gleiche Bedeutung wie Primfaktoren.

Aufgabe: $\frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{2}{9} = ?$

1. **Nenner in Primfaktoren zerlegen:**

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

2. **Hauptnenner bestimmen:**

$$HN = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

3. **Erweiterungszahlen festlegen:**

36 : 4 = 9

36 : 12 = 3

36 : 9 = 4

Der Hauptnenner wird bestimmt, indem zunächst jeder Nenner in Primfaktoren zerlegt wird. Anschließend bildet man das Produkt aus den höchsten Potenzen der einzelnen Primfaktoren. Schließlich müssen alle Brüche so erweitert werden, daß sie den Hauptnenner als gemeinsamen Nenner erhalten.

Die Erweiterungszahl findet man, indem der ermittelte Hauptnenner (HN) durch den Nenner des zu erweiternden Bruches dividiert wird. Dieses Dividieren oder Kürzen muß immer eine ganze Zahl ergeben, da der Hauptnenner das Vielfache eines jeden Nenners darstellt.

4. **Brüche erweitern und die Summe berechnen:**

$$\frac{1\cdot\boxed{9}}{4\cdot\boxed{9}}+\frac{5\cdot\boxed{3}}{12\cdot\boxed{3}}-\frac{2\cdot\boxed{4}}{9\cdot\boxed{4}}$$

$$=\frac{9}{36}+\frac{15}{36}-\frac{8}{36}$$

$$=\frac{9+15-8}{36}$$

$$=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

Werden die Zähler und Nenner der einzelnen Brüche mit der jeweiligen Erweiterungszahl multipliziert, dann erhalten alle Brüche den Hauptnenner als gleichen Nenner. Schließlich kann die Summe nach bekannten Regeln berechnet werden.

Tabelle für die obige Aufgabe:

N	P	E
4	$2\cdot 2 = 2^2$	$\frac{36}{4}=\boxed{9}$
12	$2\cdot 2\cdot 3 = 2^2\cdot 3$	$\frac{36}{12}=\boxed{3}$
9	$3\cdot 3 = 3^2$	$\frac{36}{9}=\boxed{4}$
HN $= 2^2\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = 36$		

Um eine bessere Übersicht über die einzelnen Vorgänge zu gewinnen, werden in den nun folgenden Beispielen Tabellen verwendet, die die einzelnen Lösungsschritte enthalten. Dabei bedeutet:

N: **N**enner des ursprünglichen Bruches;

P: Zerlegung in **P**rimfaktoren;

E: Bestimmung der **E**rweiterungszahl.

Beispiele:

a)

N	P	E
8	$2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$	$\frac{216}{8}=\boxed{27}$
18	$2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2$	$\frac{216}{18}=\boxed{12}$
27	$3\cdot 3\cdot 3 = 3^3$	$\frac{216}{27}=\boxed{8}$
HN $= 2^3\cdot 3^3 = 8\cdot 27 = 216$		

$$\frac{3}{8}-\frac{9}{18}+\frac{7}{27}$$

$$=\frac{3\cdot\boxed{27}}{8\cdot\boxed{27}}-\frac{9\cdot\boxed{12}}{18\cdot\boxed{12}}+\frac{7\cdot\boxed{8}}{27\cdot\boxed{8}}$$

$$=\frac{81}{216}-\frac{108}{216}+\frac{56}{216}$$

$$=\frac{81-108+56}{216}$$

$$=\frac{29}{216}$$

b) Unterschiedliche allgemeine Zahlen sind wie Primfaktoren aufzufassen.

N	P	E
a	a	$\frac{a^2b^2}{a}=\boxed{ab^2}$
a^2b	$a^2\cdot b$	$\frac{a^2b^2}{a^2b}=\boxed{b}$
ab^2	$a\cdot b^2$	$\frac{a^2b^2}{ab^2}=\boxed{a}$
HN $= a^2\cdot b^2 = a^2b^2$		

$$\frac{1}{a}+\frac{5}{a^2b}-\frac{8}{ab^2}$$

$$=\frac{1\cdot\boxed{ab^2}}{a\cdot\boxed{ab^2}}+\frac{5\cdot\boxed{b}}{a^2b\cdot\boxed{b}}-\frac{8\cdot\boxed{a}}{ab^2\cdot\boxed{a}}$$

$$=\frac{ab^2}{a^2b^2}+\frac{5b}{a^2b^2}-\frac{8a}{a^2b^2}$$

$$=\frac{ab^2+5b-8a}{a^2b^2}$$

c) Enthalten die einzelnen Nenner Summen, dann ist es sinnvoll, diese soweit wie möglich in Faktoren zu zerlegen. Anschließend ist der Hauptnenner nach bekanntem Prinzip zu bestimmen.

N	P	E
$8(x-y)$	$2^3\cdot(x-y)$	$\frac{24(x-y)}{8(x-y)}=\boxed{3}$
$12(x-y)$	$2^2\;3\;(x-y)$	$\frac{24(x-y)}{12(x-y)}=\boxed{2}$
HN $= 2^3\cdot 3(x-y) = 8\cdot 3(x-y) = 24(x-y)$		

$$\frac{2}{8x-8y}+\frac{9}{12x-12y}$$

$$=\frac{2}{8(x-y)}+\frac{9}{12(x-y)}$$

$$=\frac{2\;\boxed{\cdot 3}}{8(x-y)\;\boxed{\cdot 3}}+\frac{9\;\boxed{\cdot 2}}{12(x-y)\;\boxed{\cdot 2}}$$

$$=\frac{6}{24(x-y)}+\frac{18}{24(x-y)}$$

$$=\frac{6+18}{24(x-y)}$$

$$=\frac{24}{24(x-y)}=\frac{1}{x-y}$$

Hauptnenner suchen? Eine einfache Sache!

Neben diesem relativ komplizierten Verfahren zum Bestimmen des Hauptnenners gibt es noch „vereinfachte Verfahren".

A Man untersucht, ob im größten Nenner alle übrigen Nenner als Faktor enthalten sind.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{2}$$

In dem Nenner 8 sind alle anderen Nenner (4 und 2) als Faktor enthalten!

$$= \frac{1 \cdot \boxed{2}}{4 \cdot \boxed{2}} + \frac{3}{8} - \frac{3 \cdot \boxed{4}}{2 \cdot \boxed{4}}$$

Mit der Erweiterungszahl erweitern!

$$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8} - \frac{12}{8}$$

Addieren!

$$= \frac{2 + 3 - 12}{8}$$

$$= -\frac{7}{8}$$

Beispiele:

a) Der größte Nenner abc enthält alle anderen Nenner als Faktor; er ist somit Hauptnenner.

$$\frac{5}{ab} - \frac{x+2}{abc} - \frac{3}{a} + \frac{x}{bc}$$

$$= \frac{5 \cdot \boxed{c}}{ab \cdot \boxed{c}} - \frac{x+2}{abc} - \frac{3 \cdot \boxed{bc}}{a \cdot \boxed{bc}} + \frac{x \cdot \boxed{a}}{bc \cdot \boxed{a}}$$

Klammer nicht vergessen!

$$= \frac{5c - (x+2) - 3bc + ax}{abc}$$

$$= \frac{5c - x - 2 - 3bc + ax}{abc}$$

b) Im Nenner $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ sind die übrigen Nenner enthalten.

$$\frac{a}{a+b} + \frac{2ab}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a-b}$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{2ab}{(a+b)(a-b)} - \frac{b}{a-b}$$

$$= \frac{a\,\boxed{(a-b)}}{(a+b)\,\boxed{(a-b)}} + \frac{2ab}{(a+b)(a-b)} - \frac{b\,\boxed{(a+b)}}{(a-b)\,\boxed{(a+b)}}$$

$$\frac{a^2 - ab + 2ab - ab - b^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = 1$$

B Man prüft, ob durch schrittweises Vervielfachen des größten Nenners ein Wert erreicht wird, in dem alle anderen Nenner als Faktor enthalten sind.

Beispiele:

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{9} = ?$

1. Schritt: $2 \cdot 15 = 30$	5 als Faktor enthalten, aber nicht 9;
2. Schritt: $3 \cdot 15 = 45$	5 und 9 als Faktor enthalten.

$$\frac{3 \cdot \boxed{9}}{5 \cdot \boxed{9}} + \frac{2 \cdot \boxed{3}}{15 \cdot \boxed{3}} + \frac{4 \cdot \boxed{5}}{9 \cdot \boxed{5}}$$

Brüche erweitern;

$$= \frac{27}{45} + \frac{6}{45} + \frac{20}{45}$$

gleichnamig machen;

$$= \frac{27 + 6 + 20}{45}$$

addieren;

$$= \frac{53}{45}$$

Ergebnis angeben.

b) $\frac{3}{a^3} + \frac{5}{8a^2} - \frac{s}{12a}$

Häufig erkennt man schon von vornherein, daß Potenzen von allgemeinen Zahlen und die Vervielfachung ihrer Koeffizienten den Hauptnenner ergeben.

1. Schritt: in a^3 sind a^2 und a enthalten	
2. Schritt: $2 \cdot 12 = 24$	In 24 sind 8 und 12 enthalten.

Damit heißt der HN $24a^3$.

$$\frac{3 \cdot \boxed{24}}{a^3 \cdot \boxed{24}} + \frac{5 \cdot \boxed{3a}}{8a^2 \cdot \boxed{3a}} - \frac{s \cdot \boxed{2a^2}}{12a \cdot \boxed{2a^2}}$$

Erweitern!

$$= \frac{72 + 15a - 2a^2 s}{24a^3}$$

Auf einen Bruchstrich schreiben!

C Falls das unter A oder B beschriebene Verfahren nicht zum Erfolg führt, multipliziert man alle Nenner miteinander.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot\boxed{3}}{2\cdot\boxed{3}}+\frac{2\cdot\boxed{2}}{3\cdot\boxed{2}}$$

$$=\frac{3+4}{6}$$

$$=\frac{7}{6}$$

Bei diesem Verfahren ist das Auffinden der Erweiterungszahl besonders leicht. Sie setzt sich nämlich genau aus den Faktoren zusammen, die in dem Nenner des zu erweiternden Bruches nicht stehen.

Unechten Bruch stehen lassen!

Beispiele:

a) Der Hauptnenner ist das Produkt aller vorhandenen Nenner:

HN $= 11a \cdot 7b \cdot 5c$ ($= 385abc$)

$$\frac{3}{11a}+\frac{2}{7b}+\frac{2}{5c}$$

$$=\frac{3\cdot\boxed{35bc}}{11a\cdot\boxed{35bc}}+\frac{2\cdot\boxed{55ac}}{7b\cdot\boxed{55ac}}+\frac{2\cdot\boxed{77ab}}{5c\cdot\boxed{77ab}}$$

Gleichnamig machen!

$$=\frac{105bc}{385abc}+\frac{110ac}{385abc}+\frac{154ab}{385abc}$$

Auf einen Bruchstrich schreiben!

$$=\frac{105bc+110ac+154ab}{385abc}$$

b) Drei Widerstände mit den Werten $R_1 = 150\,\Omega$; $R_2 = 270\,\Omega$ und $R_3 = 220\,\Omega$ sind parallelgeschaltet. Welchen Gesamtwiderstand hat diese Schaltung?

Bevor lange nach dem HN gesucht wird, sollte der HN durch Multiplikation aller Nenner festgelegt werden:

HN $= 150 \cdot 270 \cdot 220\,\Omega = 8\,910\,000\,\Omega$

Um R_g zu berechnen, werden Zähler und Nenner vertauscht. (Es wird also der Kehrwert gebildet.)
Der Gesamtwiderstand hat einen Wert von $67{,}04\,\Omega$.

Formel:

$$\frac{1}{R_g}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_g}=\frac{1}{150\,\Omega}+\frac{1}{270\,\Omega}+\frac{1}{220\,\Omega}$$

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\boxed{59\,400}+\boxed{33\,000}+\boxed{40\,500}}{8\,910\,000\,\Omega}$$

$$\frac{1}{R_g}=\frac{132\,9\cancel{00}}{8\,910\,0\cancel{00}\,\Omega}$$ **Durch Hundert kürzen!**

$$R_g=\frac{89100\,\Omega}{1329}=67{,}04\,\Omega$$

Schließlich noch ein Tip zu der letztgenannten Aufgabe:

Die Widerstände wurden der 10%-Normreihe entnommen, d. h., die Werte haben eine Toleranz von ± 10%. Aus diesem Grund ist es genau genug, zunächst die einzelnen Leitwerte zu berechnen, sie zu addieren und anschließend den Kehrwert zu bilden.

Leitwerte der Widerstände:

Widerstände in kΩ angeben!

Für $R_1 : G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{0{,}15\,\text{k}\Omega} = 6{,}67\,\text{mS}$

Für $R_2 : G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{0{,}27\,\text{k}\Omega} = 3{,}7\,\text{mS}$

Die Rechnung wird überschaubarer, wenn die Widerstandswerte in kΩ (Kiloohm) angegeben werden.

Für $R_3 : G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{0{,}22\,\text{k}\Omega} = 4{,}55\,\text{mS}$

Leitwerte addieren!

$G = 6{,}67\,\text{mS} + 3{,}7\,\text{mS} + 4{,}55\,\text{mS}$

$G = 14{,}92\,\text{mS}$

Widerstand berechnen (Umkehren!)

$\frac{1}{G} = R_g = \frac{1}{14{,}92\,\text{mS}} = 0{,}06702\,\text{k}\Omega$

$R_g = 67{,}02\,\Omega$

Vergleich zur vorherigen Berechnung:
$R_g = 67{,}04\,\Omega$; also $0{,}02\,\Omega$ Differenz!

c) In diesem Beispiel wird der Hauptnenner durch Multiplikation beider Klammern bestimmt.

HN $= (x - y)(x + y) = (x^2 - y^2)$

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$$

Erweitern!

$$=\frac{1\cdot\boxed{(x+y)}}{(x-y)\cdot\boxed{(x+y)}}-\frac{1\cdot\boxed{(x-y)}}{(x+y)\boxed{(x-y)}}$$

Auf einen Bruchstrich schreiben!

$$=\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

Klammer vorzeichengerecht auflösen!

$$=\frac{x+y-x+y}{(x+y)(x-y)}$$

Summe im Zähler berechnen!

$$=\frac{2y}{(x+y)(x-y)}$$

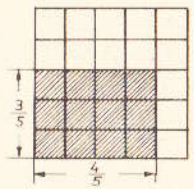
$$=\frac{2y}{x^2-y^2}$$

1.3.5 Multiplikation und Division von Brüchen

1.3.5.1 Multiplikation von Brüchen

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$$

→ 12 von 25 Feldern



Nebenstehende Grafik läßt erkennen, wie die Regel zur Multiplikation zweier Brüche lauten muß:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Beispiele:

a) Produkt im Zähler und im Nenner bilden und anschließend kürzen.

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{4\cdot 7}{5\cdot 8}=\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$$

b) Hier können die Koeffizienten zum Schluß gekürzt werden!

$$\frac{6a}{4x} \cdot \frac{19b}{y} = \frac{6a \cdot 19b}{4x \cdot y} = \frac{114ab}{4xy} = \frac{57ab}{2xy}$$

c) Am günstigsten ist es, den Faktor (-2) vor die beiden Summen zu schreiben und ihn mit der ersten oder zweiten Summe zu multiplizieren; niemals die (-2) mit **beiden** Klammern multiplizieren!

$$\frac{3-u}{4+f} \cdot \frac{-2\,(2+c)}{g}$$
$$= \frac{-2\,(3-u)\,(2+c)}{g\,(4+f)}$$
$$= \frac{(-6+2u)\,(2+c)}{g\,(4+f)}$$
$$= \frac{-12-6c+4u+2cu}{4g+fg}$$

d) Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert werden soll, dann ist nur der Zähler mit der Zahl zu multiplizieren und der Nenner beizubehalten.

$$\boxed{\textbf{Beachte: } 7 = \frac{7}{1}} \rightarrow \boxed{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{1}} \cdot \frac{3}{4}$$
$$= \frac{7 \cdot 3}{4} = \frac{21}{4}$$

e) Wird eine Summe mit einer Summe aus zwei Brüchen multipliziert, ist genauso vorzugehen wie bei der Multiplikation von zwei Summen; es ist also jeder Summand der ersten mit jedem Summand der zweiten Summe zu multiplizieren.

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right)(s+t)$$
$$= \frac{s}{s} + \frac{t}{s} - \frac{s}{t} - \frac{t}{t}$$
$$= 1 + \frac{t}{s} - \frac{s}{t} - 1$$
$$= \frac{t}{s} - \frac{s}{t}$$

f) Hier ist die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ anzuwenden.

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$$
$$= \frac{x^2}{y^2} + 2 \cdot \frac{x \cdot y}{y \cdot x} + \frac{y^2}{x^2}$$
$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2$$

1.3.5.2 Division von Brüchen

$10 : 2 = 5$ (Die 2 ist in der 10 5mal enthalten.)

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ ($^1/_4$ ist in $^1/_2$ 2mal enthalten.)

Beim Dividieren wird gefragt, wie oft eine Zahl in der anderen enthalten ist.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

Diese Division kann auch durchgeführt werden, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Zwei Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch (Dividend) mit dem Kehrwert des zweiten Bruches (Divisor) multipliziert.

Beim Dividieren müssen wir folgende 3 Fälle auseinanderhalten:

1. Division Bruch durch Bruch

Oftmals wird die Division auch als Doppelbruch geschrieben. Der sogenannte Hauptbruchstrich befindet sich immer in Höhe des Gleichheitszeichens.

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{9} \qquad \boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$$

2. Division Bruch durch Zahl

Der Kehrwert einer ganzen Zahl enthält immer im Zähler die Zahl 1.

$$a \rightarrow \frac{1}{a} \qquad 5 \rightarrow \frac{1}{5}$$

$$\frac{\frac{4}{3}}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{21} \qquad \boxed{\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}}$$

3. Division Zahl durch Bruch

Hier wird der Kehrwert des Bruches mit der ganzen Zahl multipliziert.

$$\frac{6}{\frac{3}{4}} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} \qquad \boxed{\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{cb}{a}}$$
$$= 8$$

Beispiele:

a) Der Bruch im Zähler ist mit dem Kehrwert des Bruches im Nenner zu multiplizieren.

$$\frac{\frac{5a}{6c}}{\frac{8d}{9e}} = \frac{5a \cdot \overset{3}{\cancel{9}}e}{\underset{2}{\cancel{6}}c \cdot 8d} = \frac{15ae}{16cd}$$

b) Stehen im Zähler und Nenner Summen von Brüchen, dann sind zunächst die Brüche im Zähler und Nenner gleichnamig zu machen. Anschließend kann mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert werden.

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{15}}{\frac{1 + 1 \cdot 3}{6}}$$
$$= \frac{\frac{10 + 9}{15}}{\frac{1 + 3}{6}}$$

$$= \frac{\frac{19}{15}}{\frac{4}{6}}$$

Kürzen!

$$= \frac{19 \cdot \cancel{6}^{2}}{{}_{5}\cancel{15} \cdot \cancel{4}_{2}}$$

$$= \frac{19}{10}$$

Dieselbe Aufgabe kann ebenfalls wie folgt berechnet werden:

1. Zähler und Nenner mit ihrem gemeinsamen Hauptnenner multiplizieren. (Dadurch verschwindet der Doppelbruch.)

$$\frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) \cdot 30}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) \cdot 30}$$

HN: $6 \cdot 5 = 30$. Mit dem gemeinsamen HN = 30 Zähler und Nenner multiplizieren!

Begründung:

Da der HN ein Vielfaches aller Nenner ist, können alle ursprünglichen Nenner gekürzt werden. Es entsteht ein einfacher Bruch!

$$= \frac{\frac{2 \cdot \cancel{30}^{10}}{\cancel{3}} + \frac{3 \cdot \cancel{30}^{6}}{\cancel{5}}}{\frac{1 \cdot \cancel{30}^{5}}{\cancel{6}} + \frac{1 \cdot \cancel{30}^{15}}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 6}{1 \cdot 5 + 1 \cdot 15}$$

2. Summe berechnen!

$$= \frac{20 + 18}{5 + 15}$$

3. Kürzen!

$$= \frac{\cancel{38}^{19}}{\cancel{20}_{10}} = \frac{19}{10}$$

Beachte: Dieses Verfahren empfiehlt sich dann, wenn der gemeinsame HN ein einfacher Ausdruck ist.

c) Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert werden, dann wird der Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl multipliziert.

$$\frac{\frac{7x}{4z}}{9y} = \frac{7x}{4z \cdot 9y}$$

$$= \frac{7x}{36yz}$$

d) Bei der Berechnung der Spannung an zwei parallelgeschalteten Widerständen ergab sich die nebenstehende Formel.

$$U = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Um diesen Doppelbruch berechnen zu können, müssen die Brüche im Nenner gleichnamig gemacht werden.

$$= \frac{I}{\frac{R_1 + R_2}{R_1\, R_2}}$$

Schließlich kann mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert werden.

$$U = \frac{I \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

e) Die Stromstärke in einem stromdurchflossenen Leiter soll berechnet werden. Folgende Größen sind gegeben:

Leiterdurchmesser d,
Leiterlänge ℓ,
elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$,
anliegende Spannung U.

Zur Berechnung müssen drei Grundformeln benutzt werden.

1) $I = \frac{U}{R}$ (Ohmsches Gesetz)

2) $R = \frac{\ell}{\varkappa \cdot A}$ (Leiterwiderstand)

3) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ (Leiterquerschnitt)

Zur Vereinfachung der Lösung wird die Formel 3) in die Formel 2) und beide zusammen in die Formel 1) eingesetzt.

3) in 2): $R = \dfrac{\ell}{\varkappa \cdot \frac{d^2\, \pi}{4}}$

Zunächst wird der Doppelbruch im Nenner beseitigt.

3) + 2) in 1): $I = \dfrac{U}{\dfrac{\ell}{\varkappa \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}}}$

$$I = \frac{U}{\frac{\ell \cdot 4}{\varkappa \cdot d^2 \cdot \pi}}$$

Anschließend wird mit dem Kehrwert des Bruches im Nenner multipliziert.

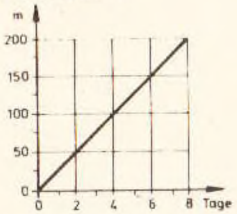
$$I = \frac{U \cdot \varkappa \cdot d^2 \cdot \pi}{\ell \cdot 4}$$

2 Dreisatz- und Prozentrechnung

2.1 Dreisatzrechnung

2.1.1 Gerades und umgekehrtes Verhältnis

Gerades Verhältnis



Bei der Darstellung ergibt sich eine Gerade.

Gerades Verhältnis:
je mehr . . . desto mehr

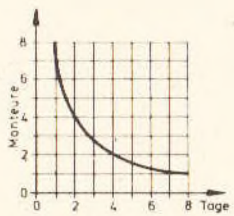
In einem Haus sollen 200 m Heizungsrohre verlegt werden:

Dabei schafft ein Monteur

an 1 Tag	25 m
an 2 Tagen	50 m
an 3 Tagen	75 m
an 4 Tagen	100 m
.	.
.	.
.	.
an 8 Tagen	200 m

Es wurde von einer Einheit (1 Tag) auf ein Vielfaches geschlossen (8 Tage). Von Tag zu Tag wächst das Rohrnetz um 25 m. Arbeitstag und Rohrnetzlänge stehen in einem sog. **geraden Verhältnis** zueinander.

Umgekehrtes Verhältnis



Bei der Darstellung ergibt sich eine Hyperbel.

Umgekehrtes Verhältnis:
je mehr . . . desto weniger

Ein Monteur würde das Rohrnetz in 8 Tagen erstellen. Angenommen, andere Monteure würden ihm bei der Arbeit helfen, so wäre die Arbeit schneller erledigt:

1 Monteur benötigt 8 Tage

2 Monteure benötigen $\frac{8}{2} = 4$ Tage

3 Monteure benötigen $\frac{8}{3}$ Tage

.
.
.

8 Monteure benötigen $\frac{8}{8} = 1$ Tag

Man spricht von einem **umgekehrten Verhältnis**[1], weil mehr Arbeiter weniger Zeit benötigen.

[1] In der Literatur findet man hierfür auch den Begriff „ungerades Verhältnis".

2.1.2 Dreisatz mit geradem Verhältnis

Die Dreisatzrechnung dient dazu, aus drei bekannten Zahlen oder Größen eine vierte, unbekannte zu berechnen. Diese Unbekannte wird meistens mit dem Buchstaben x bezeichnet.

Beispiele:

a)

10 kg kosten 5 DM	**Jeder Dreisatz besteht aus:**
15 kg kosten x DM	einem Bedingungssatz und einem Fragesatz (Unbekannte am Schluß)

Die Dreisatzaufgabe wird wie folgt schrittweise gelöst:

Beachte: Gleiche Größen untereinander schreiben!

1. Auf eine Einheit schließen — 1 kg kostet $\frac{5}{10}$ DM
2. Auf das Vielfache schließen — 15 kg kosten $15 \cdot \frac{5}{10}$ DM
3. Unbekannte berechnen

$$x = \frac{15 \cdot 5}{10}\ \text{DM}$$

$$x = 7{,}50\ \text{DM}$$

b) In 2,75 Stunden legt ein Fußgänger 17,75 km zurück. Wie lange braucht er für 23 km, wenn er mit derselben Geschwindigkeit läuft?

Der Text muß in einen Bedingungs- und Fragesatz übersetzt werden!

1. Bedingungssatz	Für 17,75 km	braucht er	2,75 h
2. Fragesatz	Für 23 km	braucht er	x h
3. Auf eine Einheit schließen	Für 1 km	braucht er	$\frac{2{,}75}{17{,}75}$ h
4. Auf das Vielfache schließen	Für 23 km	...	$23 \cdot \frac{2{,}75}{17{,}75}$ h

5. Ergebnis berechnen

$$x = \frac{23 \cdot 2{,}75}{17{,}75}\ \text{h}$$

$$x = 3{,}56\ \text{h}$$

2.1.3 Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis

Dreisatzaufgaben mit umgekehrtem Verhältnis werden nach dem gleichen Schema gelöst wie die mit geradem Verhältnis.

Beispiel:

Um 1000 Widerstände herzustellen, muß eine Maschine 12 h laufen. Wieviel Maschinen müßte man aufstellen, um dieselbe Anzahl von Widerständen in 2 h zu produzieren?

Text in einen Bedingungs- und Fragesatz umstellen!

1. Bedingungssatz	Produktion in 12 h mit 1 Maschine
2. Fragesatz	Produktion in 2 h mit x Maschinen
3. Auf eine Einheit schließen	In 1 h benötigt man 12 Maschinen
4. Auf das Vielfache schließen	In 2 h benötigt man $\frac{12}{2}$ Maschinen
5. Unbekannte berechnen	$x = \frac{12}{2} = 6$

Verfahren zur Lösung von Dreisatzaufgaben mit geradem und umgekehrtem Verhältnis:

1. Aus dem Text der Aufgabe einen Bedingungs- und einen Fragesatz (Unbekannte steht immer am Ende) erstellen.
2. Aus dem Bedingungssatz auf eine Einheit schließen.
3. Von der Einheit auf ein Vielfaches schließen.
4. Die Unbekannte berechnen.

2.2 Prozentrechnung

Die Prozentrechnung dient dazu, mehrere Werte miteinander zu vergleichen. Als Vergleichszahl wird dabei immer die Zahl 100 gesetzt. Die Angabe in Prozent (mathematisches Zeichen: %) ist nur eine andere Bezeichnung für Hundertstel. Daher ist für Prozent auch die Angabe „vom Hundert" (Abkürzung: v. H.) üblich. 1 % entspricht demnach 1 vom Hundert, also $\frac{1}{100}$. Bezieht man sich dabei auf eine Größe, auch Grundwert genannt, so ist 1 % ihr 100ster Teil oder $\frac{1}{100}$ des Grundwertes.

$$1 \text{ v. H.} = 1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$2 \text{ v. H.} = 2\,\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$97 \text{ v. H.} = 97\,\% = \frac{97}{100} = 0{,}97$$

$$1\,\% \text{ von } 100 \text{ DM} = \frac{1}{100} \cdot 100 \text{ DM} = 0{,}01 \cdot 100 \text{ DM} = 1 \text{ DM}$$

$$11\,\% \text{ von } 1285 \text{ DM} = \frac{11}{100} \cdot 1285 \text{ DM} = 0{,}11 \cdot 1285 \text{ DM} = 141{,}35 \text{ DM}$$

Bei der Prozentrechnung ist zwischen drei Begriffen zu unterscheiden:

Grundwert $\triangleq$ 100 %	1. Grundwert	(z. B. gesamtes Sparguthaben)
$p\,\% = \frac{p}{100}$	2. Prozentsatz p	(z. B. Zinssatz für Sparguthaben)
Grundwert mal Prozentsatz	3. Prozentwert	(z. B. Zinsen)

Prozent (%) ist ein Bruch mit dem Nenner 100. 1 Prozent (1 %) einer Größe ist ihr hundertster Teil.

$$1\,\% = \frac{1}{100} \text{ vom Grundwert}$$

Beispiele:

a) **Prozentwert gesucht**

Um den Prozentwert zu bestimmen, muß der Grundwert mit dem Prozentsatz multipliziert werden.

3 % von 200 DM:	0,03 · 200 DM	= 6 DM
111 % von 30 kg:	1,11 · 30 kg	= 33,3 kg
4,5 % von 65 V:	0,045 · 65 V	= 2,925 V

b) **Prozentsatz gesucht**

Mit einem fehlerhaften Meßinstrument wird eine elektrische Spannung gemessen. Das Instrument zeigt eine Spannung von 52 V an. Die tatsächliche Spannung beträgt 60 V. Wie groß ist der prozentuale Fehler?

Soll der Prozentsatz ermittelt werden, so bedient man sich zweckmäßig des Dreisatzes.

Lösungsweg:

Der Fehlerwert beträgt 60 V − 52 V, also 8 V. Er ist auf den Grundwert von 60 V (≙ Sollwert = 100 %) zu beziehen. Dafür kann der nebenstehende Dreisatz geschrieben werden.

$60\ \text{V} = 100\ \%$ (Bedingungssatz)
$8\ \text{V} = x\ \%$ (Fragesatz)

Auf eine Einheit (1 V) schließen.

$$1\ \text{V} = \frac{100}{60}\ \%$$

Auf das Vielfache (8 V) schließen und Lösung angeben.

$$8\ \text{V} = 8 \cdot \frac{100}{60}\ \% = \frac{800}{60}\ \% = 13{,}33\ \%$$

Bezogen auf den Grundwert von 60 V (tatsächliche Spannung) beträgt der Fehler 13,33 %.

c) **Grundwert gesucht**

Der Endverkaufspreis eines Farbfernsehers beträgt 2169,60 DM. Was kostet das Gerät netto, also ohne 13 % Mehrwertsteuer?

> Zur einfachen Lösung wird die Dreisatzrechnung empfohlen.

Der gesuchte Grundwert, der dem Nettopreis, also 100 %, entspricht, ist die Bezugsgröße. Der Endverkaufspreis entspricht demnach:

$$100\ \% + 13\ \% = 113\ \%$$

Es gilt also nebenstehender Dreisatz.

$113\ \% = 2169{,}60$ DM (Bedingungssatz)
$100\ \% = x$ DM (Fragesatz)

Auf eine Einheit (1 %) schließen.

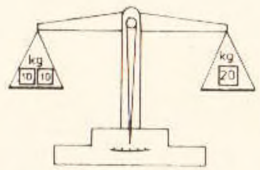
$$1\ \% = \frac{2169{,}60}{113}\ \text{DM}$$

Auf das Vielfache (100 %) schließen und die Lösung angeben.

$$100\ \% = 100 \cdot \frac{2169{,}60}{113}\ \text{DM} = 1920\ \text{DM}$$

Der Nettopreis beträgt 1920,– DM.

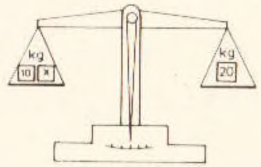
3 Einfache Gleichungen



$$10\ \text{kg} + 10\ \text{kg} = 20\ \text{kg}$$

Unter einer Gleichung versteht man in der Mathematik, daß zwei Ausdrücke, die durch ein Gleichheitszeichen (=) getrennt sind, gleich sind. Die einfachste Vorstellung einer Gleichung liefert eine Waage, auf deren Waagschalen zu beiden Seiten jeweils die gleiche Gewichtsmasse liegt.

Der nebenstehende Ausdruck ist die einfachste Form einer Gleichung. Sie wird **identische Gleichung** oder **Aussage** genannt, da hier nur eine Aussage darüber gemacht wird, ob etwas wahr oder falsch ist.



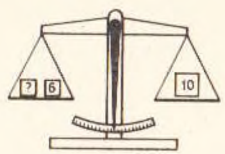
$$10\ \text{kg} + x = 20\ \text{kg}$$
$$x = 10\ \text{kg}$$

Enthalten Gleichungen neben bekannten auch unbekannte Größen, auch Variable genannt, so bezeichnet man sie als **Bestimmungsgleichung** oder **Aussageform.** Wir nennen die Variable künftig zum besseren Verständnis einfach Unbekannte.

Es ist stets das Ziel, Einsetzungen für die Unbekannte zu finden, d. h. die Gleichung nach der Unbekannten aufzulösen, um die Bestimmungsgleichung (Aussageform) in eine wahre identische Gleichung (Aussage) zu überführen.

Eine Bestimmungsgleichung, auch Aussageform genannt, besteht neben bekannten Größen aus mindestens einer Unbekannten. Eine Bestimmungsgleichung ist dann richtig gelöst, wenn anstelle der Unbekannten eine Zahl eingesetzt wird, die bewirkt, daß eine wahre Aussage bzw. identische Gleichung entsteht.

$$x + 6 = 10$$
$$x = 4$$



Die nebenstehende Gleichung hat das Ergebnis $x = 4$, d. h., setzt man anstelle der Unbekannten x die Zahl 4 in die Gleichung ein, erhält man eine wahre Aussage (Probe).

Wenn $a = b$

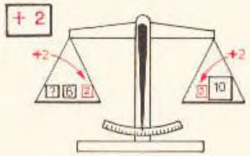
dann gilt auch:
$$\left\{\begin{array}{l} a + c = b + c \\ a \cdot c = b \cdot c \\ a : c = b : c \; (c \neq 0) \\ a - c = b - c \\ \sqrt{a} = \sqrt{b} \end{array}\right.$$

In den nachfolgenden Beispielen soll untersucht werden, ob sich die Lösung nicht verändert, d. h. die Gleichung identisch bleibt, wenn Rechenoperationen zu beiden Seiten der Gleichung mit derselben Zahl durchgeführt werden.

Beispiele:

a) **Addition einer Zahl, z. B. 2:**
Wir addieren zu beiden Seiten die Zahl 2 und fassen zusammen.
Das Ergebnis ist ebenfalls, wie bei der Ausgangsgleichung, $x = 4$.

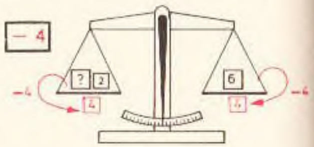
$$x + 6 \boxed{+2} = 10 \boxed{+2}$$
$$x + 8 = 12$$
$$x = 4$$



Probe: $4 + 8 = 12$

b) **Subtraktion einer Zahl, z. B. 4:**
Auch wenn von beiden Seiten die Zahl 4 subtrahiert wird, ändert sich das Ergebnis nicht.

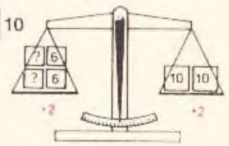
$$x + 6 \boxed{-4} = 10 \boxed{-4}$$
$$x + 2 = 6$$
$$x = 4$$



Probe: $4 + 2 = 6$

c) **Multiplikation mit einer Zahl, z. B. 2:**
Wird die Gleichung, d. h. jedes Glied der Gleichung, mit der Zahl 2 multipliziert, so ist die Lösung, wie durch die Probe festgestellt wird, wiederum $x = 4$.

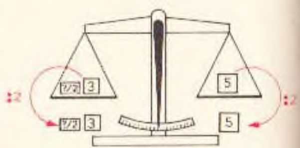
$$\boxed{2\cdot}(x + 6) = \boxed{2\cdot}10$$
$$2x + 12 = 20$$
$$x = 4$$



Probe:
$$2 \cdot 4 + 12 = 20$$
$$8 + 12 = 20$$
$$20 = 20$$

d) **Division durch eine Zahl, z. B. 2:**
Es wird jedes Glied der Gleichung durch die Zahl 2 dividiert; auch dabei verändert sich das Ergebnis nicht.
Wie bei der Division gibt es auch hier eine Ausnahme, nämlich dann, wenn die Gleichung durch den Wert Null dividiert wird.

$$\frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$$
$$\frac{x}{2} + 3 = 5$$
$$x = 4$$



Probe:
$$\frac{4}{2} + 3 = 5$$
$$2 + 3 = 5$$
$$5 = 5$$

Auf beiden Seiten einer Bestimmungsgleichung kann die gleiche Rechenoperation mit derselben Zahl durchgeführt werden, ohne daß sich das Ergebnis der Gleichung verändert.

Dividieren Sie nie eine Gleichung durch einen Ausdruck, der den Wert 0 besitzt!

$3 \cdot 0 = 4 \cdot 0$
$0 = 0$

Würde man diese identische Gleichung durch 0 dividieren, ergäbe sich der nebenstehende **Unsinn!**

$$\frac{3 \cdot \cancel{0}}{\cancel{0}} = \frac{4 \cdot \cancel{0}}{\cancel{0}}$$
$$3 = 4$$

Um den Wert der Unbekannten zu bestimmen, müssen die bekannten von den unbekannten Gliedern getrennt werden, d. h., eine Gleichung ist so umzuformen, daß auf der einen Seite die Glieder mit bekanntem Wert und auf der anderen Seite die unbekannten Glieder stehen. Schließlich werden bekannte und unbekannte Glieder zusammengefaßt, und die Lösung kann angegeben werden. Dabei gilt als Vereinbarung, daß links die Unbekannte (ohne Vorzeichen und Koeffizient) und rechts die bekannten Glieder stehen.

$x;\ 5x;\ \frac{10}{x};\ \frac{9x}{5}$ — **Die Unbekannte (Variable) und Produkte oder Quotienten mit der Unbekannten werden als lineare Glieder bezeichnet.**

$10;\ 5 + 3;\ \frac{21}{2}$ — **Die bekannten Glieder einer Gleichung werden absolute Glieder genannt.**

Beispiele:

a) Die Unbekannte ist durch eine **Addition** mit einer absoluten Größe verbunden.
Umkehrung: Subtraktion derselben Größe $+2 - 2 = 0$
Dadurch wird das absolute Glied auf der linken Seite aufgehoben. Die Lösung kann angegeben werden.

$$x + 2 = 7$$
$$x + 2 \boxed{-2} = 7 \boxed{-2}$$
$$x + 0 = 7 - 2$$
$$x = 7 - 2$$
$$x = 5$$

b) Da die Unbekannte durch eine Multiplikation mit einer absoluten Größe verbunden ist, muß hier durch die absolute Größe dividiert werden.

$$3x = 12$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Als einfache Gleichungen werden solche bezeichnet, in denen nur Summen und Differenzen oder Produkte und Quotienten vorkommen.

Für das Umstellen physikalischer Formeln gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie für „allgemeine" Gleichungen.

Wenn die Unbekannte bisher mit dem Buchstaben x bezeichnet wurde, ist in Formeln immer das Formelzeichen als Unbekannte zu betrachten, dessen Zahlenwert in einer Aufgabe unbekannt ist und gesucht wird. Es besteht also gar kein großer Unterschied zwischen einer „normalen" Gleichung und einer physikalischen Formel.

Folgende Regel sollte beachtet werden:

Erst nachdem die Formel umgestellt worden ist, sind die gegebenen Größen mit Zahlenwert und Einheit einzusetzen!

3.1 Gleichungen mit Summen und Differenzen

Beispiele:

a)

$$x + 4 = 20$$
$$x + 4 \boxed{-4} = 20 \boxed{-4}$$
$$x = 20 - 4$$
$$x = 16$$

Die mit x verbundene Größe heißt hier $+4$. Dieses Glied wird aufgehoben, indem die bestehende Rechenart umgekehrt wird, d. h., man subtrahiert von beiden Seiten die Zahl 4. Damit wird erreicht, daß die Unbekannte auf der linken Seite allein steht. Das Ergebnis kann direkt angegeben werden.

b)

$$x - 8 = 9$$
$$x - 8 \boxed{+8} = 9 \boxed{+8}$$
$$x = 9 + 8$$
$$x = 17$$

Das mit x verbundene Glied heißt -8. Man hebt es auf, indem zu beiden Seiten der Gleichung 8 addiert wird.

Formelumstellungen

a) $U = U_1 + U_2 + U_3$

Gegebene Formel: $U = U_1 + U_2 + U_3$
gesucht: U_2

$$U - U_1 = U_2 + U_3$$
$$U - U_1 - U_3 = U_2$$
$$U_2 = U - U_1 - U_3$$

1. U_1 subtrahieren!
2. U_3 subtrahieren!
3. Seiten tauschen, damit die gesuchte Größe (Unbekannte) links steht!

b) $I = I_1 - I_2 + I_3 + I_4$

Gegebene Formel: $I = I_1 - I_2 + I_3 + I_4$
gesucht: I_3

$$I - I_1 = -I_2 + I_3 + I_4$$
$$I - I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$
$$I - I_1 + I_2 - I_4 = I_3$$
$$I_3 = I - I_1 + I_2 - I_4$$

1. I_1 subtrahieren!
2. I_2 addieren!
3. I_4 subtrahieren!
4. Seiten tauschen!

3.2 Gleichungen mit Produkten und Quotienten

Beispiele:

a)

$$3x = 15$$
$$\frac{3 \cdot x}{\boxed{3}} = \frac{15}{\boxed{3}}$$
$$x = 5$$

Hier ist die Unbekannte durch eine Multiplikation mit einer anderen Größe verbunden. Das bedeutet, daß man auf beiden Seiten mit der Umkehrung, also mit einer Division durch 3, rechnen muß. Nach dem Kürzen kann das Ergebnis direkt angegeben werden.

b)

$$\frac{x}{4} = 20$$
$$\frac{x}{4} \boxed{\cdot 4} = 20 \boxed{\cdot 4}$$
$$x = 80$$

Damit die Division durch die Zahl 4 auf der linken Seite aufgehoben wird, ist die Gleichung auf beiden Seiten mit der Zahl 4 zu multiplizieren. Nach dem Kürzen wird das Ergebnis angegeben.

Formelumstellungen

a)

$$v = \frac{\ell}{t}$$
$$v \cdot t = \ell$$
$$t = \frac{\ell}{v}$$

Gegebene Formel: $v = \frac{\ell}{t}$;
gesucht: t

1. Mit t multiplizieren!
2. Durch die Vorzahl von t dividieren!

b)

$$I = \frac{U}{R}$$
$$I \cdot R = U$$
$$U = I \cdot R$$

Gegebene Formel: $I = \frac{U}{R}$
gesucht: U

1. Mit R multiplizieren!
2. Seiten tauschen, damit die gesuchte Größe (Unbekannte) links steht!

c)

$$R = \frac{\varrho \cdot \ell}{A}$$
$$R \cdot A = \varrho \cdot \ell$$
$$\frac{R \cdot A}{\varrho} = \ell$$
$$\ell = \frac{R \cdot A}{\varrho}$$

Gegebene Formel: $R = \frac{\varrho \cdot \ell}{A}$
gesucht: ℓ

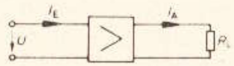
1. Mit A multiplizieren!
2. Durch ϱ dividieren!
3. Seiten tauschen!

3.3 Proportionen

Wenn zwei Größen miteinander verglichen werden sollen, dann gibt es die folgenden zwei Möglichkeiten:

a) **Bilden der Differenz zweier Größen**

Das nebenstehende Schaltbild stellt einen Verstärker dar, dessen Eingangsstrom I_E 10 mA und dessen Ausgangsstrom I_A 50 mA beträgt.



Eingangs- und Ausgangsstrom können miteinander verglichen werden, indem die Differenz beider Größen gebildet wird. Dabei wird ausgesagt, um wieviel mA der Ausgangsstrom größer als der Eingangsstrom ist.

Differenz:

$$\Delta I = I_A - I_E$$
$$\Delta I = (50 - 10)\ \text{mA}$$
$$\Delta I = 40\ \text{mA}$$

Solchen Differenzen wird der griechische Buchstabe Δ (Delta) als Formelbuchstabe zugeordnet. Sie werden arithmetisches Verhältnis genannt.

Die Differenz zweier Größen ist immer eine benannte Zahl.

b) **Bilden des Quotienten zweier Größen**

Werden die Ströme I_E und I_A dividiert, dann drückt der Quotient aus, um welchen Faktor I_A größer ist als I_E. Dieses Verhältnis wird als geometrisches Verhältnis bezeichnet. In diesem speziellen Fall ist das Verhältnis der Eingangsgröße zur Ausgangsgröße berechnet worden, was mit dem Verstärkungsfaktor einer elektronischen Schaltung gleichzusetzen ist.

Quotient: (in diesem Fall: Verstärkung v)

$$v = \frac{\text{Ausgangsgröße}}{\text{Eingangsgröße}}$$

$$v = \frac{I_A}{I_E} = I_A : I_E$$

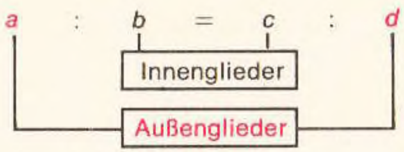
$$v = \frac{50\ \text{mA}}{10\ \text{mA}}$$

$$v = 5$$

Der Quotient ist immer eine unbenannte Zahl.

Die Differenz zweier gleichartiger Größen wird arithmetisches Verhältnis genannt; der Quotient beider Größen dagegen als geometrisches Verhältnis bezeichnet.

$a : b = c : d$
Gelesen: a verhält sich zu b wie c zu d.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \left\{ \begin{matrix}\text{Mit } bd \text{ mul-}\\ \text{tiplizieren}\end{matrix} \right\} a \cdot d = b \cdot c$$

Besteht eine Gleichung aus zwei wertgleichen Verhältnissen, so bezeichnet man sie als Verhältnisgleichung oder Proportion. Dabei werden die Glieder, die außen stehen, als Außenglieder und die inneren als Innenglieder bezeichnet. Da anstelle des Doppelpunktes auch ein Bruchstrich geschrieben werden kann, ergibt sich nach der Multiplikation mit dem HN bd folgende Regel:

$a : b = c : d$
$a \cdot d = b \cdot c$

Bei einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem der Innenglieder.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ oder } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

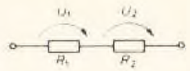
Beachte: Die Proportion bleibt auch dann erhalten, wenn

a) die Seiten vertauscht werden,

b) Zähler und Nenner vertauscht werden.

Beispiele:

a) In einem Reihenstromkreis verhalten sich die Widerstandswerte genauso wie die an ihnen auftretenden Spannungsabfälle.



$$R_1 : R_2 = U_1 : U_2 \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

Es soll der Spannungsabfall U_2 an R_2 berechnet werden, wenn:
$U_1 = 60\ \text{V}$; $R_1 = 22\ \Omega$; $R_2 = 150\ \Omega$

Um ein leichtes Umformen der Verhältnisgleichung zu erreichen, wird die unbekannte Größe auf die linke Seite in den Zähler gesetzt; anschließend wird nur noch mit dem Nenner des links vom Gleichheitszeichen stehenden Bruches multipliziert, und man erhält sofort die Lösung.

Proportion: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2}$

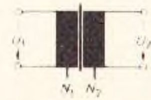
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$U_2 = \frac{R_2 \cdot U_1}{R_1}$$

$$U_2 = \frac{150\ \Omega \cdot 60\ \text{V}}{22\ \Omega}$$

$$U_2 = 409{,}1\ \text{V}$$

b) Bei einem Transformator verhalten sich die Spannungen wie die Windungszahlen. Auch hier liegt eine Proportion vor.



Soll nun eine bestimmte Größe berechnet werden – in diesem Fall die Windungszahl N_1 –, so ist auch hier die unbekannte Größe links vom Gleichheitszeichen in den Zähler zu setzen.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \text{ oder: } \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

$$N_1 = \frac{U_1}{U_2} \cdot N_2$$

Daten des Transformators:
$U_1 = 12\ \text{V}$; $U_2 = 6\ \text{V}$; $N_2 = 500$

$$N_1 = \frac{12\ \text{V} \cdot 500}{6\ \text{V}}$$

$$N_1 = 1000$$

Bisher wurden nur Verhältnisse mit der Bedeutung

„verhält sich wie"

behandelt. Dabei war z. B. die Spannung U_1 2mal so groß wie die Spannung U_2; entsprechend verhielten sich auch die Windungszahlen. Diese Art von Verhältnissen wird „direkt proportional" genannt; der Faktor selbst heißt Proportionalitätsfaktor.

$$\frac{U_1}{U_2} \text{ verhält sich wie } \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{12\ \text{V}}{6\ \text{V}} = \frac{2}{1} \ldots \frac{1000}{500} = \frac{2}{1}$$

Proportionalitätsfaktor: 2

Beispiel:

Die nebenstehende Formel dient der Berechnung des Einflusses eines bestimmten Dielektrikums auf die Kapazität eines Kondensators. Sie enthält den Proportionalitätsfaktor ε_r (Dielektrizitätszahl). Er drückt aus, wievielmal die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum größer ist als im Vakuum.

$$\varepsilon_r = \frac{\text{Kapazität mit Dielektrikum}}{\text{Kapazität im Vakuum}}$$

Wie groß ist der Faktor ε_r, wenn bei einem Kondensator im Vakuum eine Kapazität von 12 nF und mit Dielektrikum eine von 77 nF gemessen wurde?

$$\varepsilon_r = \frac{C_{\text{Dielektrikum}}}{C_{\text{Vakuum}}} = \frac{77\ \text{nF}}{12\ \text{nF}} = 6{,}42$$

Eine solche Proportionalität liefert auch das Ohmsche Gesetz:

$$I = G \cdot U \qquad G = \frac{I}{U}$$

Der Proportionalitätsfaktor ist der Leitwert G. Er drückt aus, wie gut oder schlecht ein Stromkreis leitet, oder in welchem Verhältnis Strom und Spannung zueinander stehen. Da dieses Verhältnis immer konstant ist, muß z. B. bei einer Spannungsverdreifachung der Strom 3mal so groß werden.

Wird dieses Verhalten grafisch dargestellt, so entsteht immer eine Gerade, wobei der Proportionalitätsfaktor für die Steilheit der Geraden verantwortlich ist. Je steiler die Gerade, um so größer ist der Proportionalitätsfaktor. (Für dieses Beispiel: Je steiler die Gerade, desto größer der Leitwert, d. h. desto besser leitet der Stromkreis.)

Für einen Stromkreis gilt:

Der Strom ist proportional der Spannung. Formel:

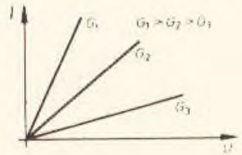
$$I \sim U$$

Einfügen des Proportionalitätsfaktors G (wie gut oder schlecht ein Stromkreis leitet = Leitwert).

$$I = G \cdot U$$

Weitere Proportionalitätsfaktoren:

α Temperaturbeiwert ($R = \alpha\, R_{20} \cdot \Delta\vartheta$)
π Zahl Pi ($U = \pi \cdot d$)
ϱ Dichte ($m = V \cdot \varrho$)
a Beschleunigung ($F = a \cdot m$)



Untersucht man Ströme und Widerstände in einem Parallelstromkreis, so gilt die folgende Regel:

Die Ströme verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Widerstände. Dieses Verhältnis wird als

„umgekehrt proportional"

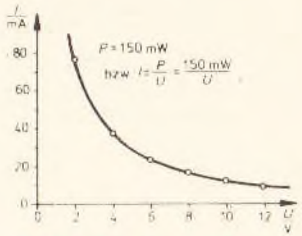
bezeichnet. Je größer also der Strom in einem Parallelzweig ist, desto kleiner muß der Widerstand sein. Wird der Strom 3mal so groß, dann muß der Widerstand 3mal so klein werden.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Für $R_1 = 20\,\Omega$; $R_2 = 60\,\Omega$; $I_2 = 5$ mA gilt:

$$I_1 = \frac{60\,\Omega \cdot 5\,\text{mA}}{20\,\Omega}$$

$$I_1 = 15\,\text{mA}$$



Soll die umgekehrte Proportionalität grafisch dargestellt werden, dann ergibt sich immer eine Hyperbel.

Zum Vergleich: Leistungshyperbel

$$I = \frac{P}{U}$$

Je größer die Spannung bei gleicher Leistung, desto kleiner ist der Strom.

Wächst eine Größe stetig im gleichen Verhältnis mit einer anderen Größe, so bezeichnet man dieses als proportional. Wird dieses Verhältnis in einem Diagramm dargestellt, dann entsteht immer eine Gerade.

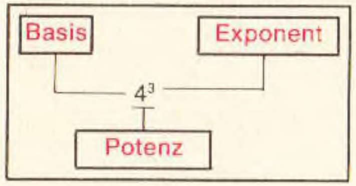
Zwei Größen verhalten sich umgekehrt proportional zueinander, wenn die eine Größe in demselben Verhältnis abnimmt wie die andere zunimmt. Als grafische Darstellung ergibt sich immer eine Hyperbel.

4 Potenzieren und Radizieren

4.1 Potenzieren/Quadrieren

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = \boxed{4^3} = 64$



Besteht ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, kann es auch in der Potenzschreibweise wiedergegeben werden. In diesem Fall enthält das Produkt die Zahl 4 dreimal als Faktor, was kurz als 4^3 (gelesen: 4 hoch 3) geschrieben werden kann.

Den Ausdruck 4^3 bezeichnet man als Potenz, wobei die Zahl 4 Basis und die Zahl 3 Exponent genannt wird.

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ $\qquad a^3 = a \cdot a \cdot a$

Der Exponent einer Potenz sagt aus, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist.

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ \text{Faktoren}}_{\text{Produkt}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenz}} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}}$$

n Faktoren, Basis, Exponent, Produkt, Potenz, Potenzwert

Besteht ein Produkt aus n gleichen Faktoren a, kann es verkürzt als Potenz a^n geschrieben werden. Der gleichbleibende Faktor a wird Basis, die Anzahl n der Faktoren Exponent genannt.

Eine Größe mit dem Exponenten 2 potenzieren heißt, sie quadrieren.

Potenzen mit dem Exponenten 2 werden auch „Quadrat" genannt.

$5^1 = 5$ $\qquad \boxed{x^1 = x}$

Der Exponent 1 kann weggelassen werden.

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ $\qquad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$\boxed{a^b \neq b^a}$

Da für die Potenzen das Kommutativgesetz keine Gültigkeit hat, dürfen Exponent und Basis nicht vertauscht werden.

4.1.1 Addition und Subtraktion von Potenzen

$4x^2 + 7x^2 - 8x^2 = 3x^2$
$15s^7 - 16s^7 + 27s^7 = 26s^7$
$5^2 + 5^2 + 5^2 = 3 \cdot 5^2$
$10^3 + 7 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3$

Nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten können addiert und subtrahiert werden.

Dabei werden die Koeffizienten addiert oder subtrahiert und die Potenzen beibehalten.

Beispiele:

a) Enthält eine Summe verschiedene Potenzen, können nur diejenigen zusammengefaßt werden, deren Basis und Exponent gleich sind.

$$5a^2 - 6b^3 + 4a^2 - 8b^3$$
$$= 9a^2 - 14b^3$$

$$4x^2 - 5x^3 + 2y^5 + 6x^3 - 3x^2$$
$$= 4x^2 - 3x^2 - 5x^3 + 6x^3 + 2y^5$$
$$= x^2 + x^3 + 2y^5$$

b) Wenn die Basis einer Potenz negativ ist, dann werden zwei Fälle voneinander unterschieden:

1. **Ist der Exponent geradzahlig** und **die Basis negativ,** dann entsteht immer ein positiver Potenzwert.

$$(-5)^2 = (-5)(-5) = +5^2 = 25$$

Regel: $\boxed{(-a)^{2n} = +a^{2n}}$

2. **Ist der Exponent eine ungerade Zahl** und **die Basis negativ,** entsteht immer ein negativer Potenzwert.

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -5^3 = -125$$

Regel: $\boxed{(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}}$

c) Werden in physikalische Formeln Einheiten eingesetzt, so können auch diese potenziert werden.

$$V = 5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 30\text{ cm}^3$$

d) Potenzen mit ungleicher Basis, aber gleichen Exponenten dürfen nicht zusammengefaßt werden.

$$a^2 + b^2 + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2$$

nicht zusammenfassen!

4.1.2 Multiplikation und Division von Potenzen

$$3^2 \cdot 3^3$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$= 3^5 = 3^{2+3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a^2 \cdot a^3 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &= a^5 = a^{2+3} \end{aligned}}$$

Werden die nebenstehenden Potenzen multipliziert, erkennt man sofort die Regel der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Potenzen mit **gleicher Basis** werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Zum Vergleich:

$2^2 \cdot 3^2$
$9 = 36$
$3)^2$
36

$$\boxed{\begin{aligned} &a^2 \cdot b^2 \\ &= a \cdot a \cdot b \cdot b \\ &= (a \cdot b)^2 \end{aligned}}$$

Potenzen mit ungleicher Basis können nur dann zusammengefaßt werden, wenn sie die gleichen Exponenten aufweisen.

$b)^n$ Potenzen mit **gleichen Exponenten** werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Beispiele:

a) In der nebenstehenden Aufgabe sollen Potenzen mit gleicher Basis multipliziert werden. Das bedeutet, es müssen die Exponenten addiert und mit der Basis potenziert werden.

$$6^5 \cdot 6^2 \cdot 6^4 = 6^{5+2+4} = 6^{11}$$

$$(ab)^2 \cdot (ab)^4 \cdot (ab)^8 = (ab)^{2+4+8} = (ab)^{14}$$

b) Sind die Exponenten gleich, aber die Basen ungleich, wird nach obenstehender Regel verfahren.

$$12^4 \cdot 10^4 \cdot 2^4 = (12 \cdot 10 \cdot 2)^4 = 240^4$$

$$x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 = (xyz)^4$$

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{32}{8} = 4 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = a^{5-3} = a^2$$

Sollen Potenzen mit gleicher Basis dividiert werden, ergibt sich das nebenstehende Verfahren. Daraus kann eine allgemeingültige Regel abgeleitet werden.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird.

Aus dieser Regel lassen sich folgende Sonderfälle ableiten:

– Steht im Nenner eine Potenz mit einem positiven Exponenten, kann sie auch im Zähler mit negativem Exponenten erscheinen.

Anwendung:

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad v = \frac{s}{t} = \frac{100\text{ m}}{10\text{ s}} = 10\text{ ms}^{-1}$$

– Steht im Nenner eine Potenz mit einem negativen Exponenten, kann er auch im Zähler als positiver Exponent auftreten.

Anwendung:

$$\frac{1}{b^{-3}} = b^3 \qquad R = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}1\ \Omega^{-1}} = 10\ \Omega$$

– Eine Potenz mit dem Exponenten 0 hat immer den Wert 1. Ausgenommen jedoch, wenn die Basis selbst auch 0 ist (ist nicht definiert).

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1 = a^{3-3} = \boxed{a^0 = 1}$$

Sind die Basen verschieden, jedoch die Exponenten gleich, gilt folgende Regel:

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ Potenzen mit ungleicher Basis und gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Quotienten mit dem gleichen Exponenten potenziert.

Beispiel:

Einen großen Rechenvorteil bringt diese Regel, wenn der Quotient selbst eine ganze Zahl ergibt, die Division also glatt aufgeht. In diesem Fall braucht nur einmal potenziert zu werden.

$$\frac{12^2}{4^2} = \left(\frac{12}{4}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$\frac{(ab)^2}{a^2} = \left(\frac{ab}{a}\right)^2 = b^2$$

4.1.3 Potenzieren von Potenzen

$$(3^2)^3 \qquad \boxed{(x^2)^3}$$
$$= (3^2)\,(3^2)\,(3^2) \qquad = (x^2)\,(x^2)\,(x^2)$$
$$= (3\cdot 3)\,(3\cdot 3)\,(3\cdot 3) = (xx)\,(xx)\,(xx)$$
$$= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$$
$$= 3^6 \qquad \boxed{= x^6}$$

Soll eine Potenz wiederum potenziert werden, dann kann man das Ergebnis über ein Produkt errechnen.

$$(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 \qquad \boxed{(x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6}$$

Einfacher ist es jedoch, die Exponenten zu multiplizieren.

$(a^m)^n = a^{mn}$ **Man potenziert eine Potenz, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.**

Beispiel:

Jeder Faktor muß potenziert werden!
Beachte: $6 = 6^1$

$$(6a^2)^2 = 6^{1\cdot 2}\,a^{2\cdot 2} = 6^2\,a^4 = 36a^4$$

4.2 Zehnerpotenzen

$$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^5 = 100\,000$$

$$\frac{1}{10\cdot 10\cdot 10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} = 0{,}001$$

Zehnerpotenzen sind Potenzen mit der Basis 10. Sie spielen in der Technik eine große Rolle, da hier häufig mit unübersehbaren Dezimalzahlen gerechnet wird. Selbstverständlich haben auch hier die Potenzgesetze ihre Allgemeingültigkeit.

Beispiele für Zehnerpotenzen:

$10 = 10^1$	$99 = 9{,}9\cdot 10^1$	$25\ \text{kg} = 2{,}5\cdot 10^1\ \text{kg}$
$100 = 10^2$	$570 = 5{,}7\cdot 10^2$	$600\ \text{m}^3 = 6\cdot 10^2\ \text{m}^3$
$1\,000 = 10^3$	$5\,000 = 5\cdot 10^3$	$3\,400x = 3{,}4\cdot 10^3x$
$10\,000 = 10^4$	$12\,000 = 1{,}2\cdot 10^4$	$23\,100\ \text{cm} = 2{,}31\cdot 10^4\ \text{cm}$
$100\,000 = 10^5$	$987\,000 = 9{,}87\cdot 10^5$	$380\,000\cdot \text{V} = 3{,}8\cdot 10^5\ \text{V}$
$\frac{1}{10} = 10^{-1} = 0{,}1$	$0{,}7 = 7\cdot 10^{-1}$	$0{,}7\ \text{g} = 7\cdot 10^{-1}\ \text{g}$
$0{,}01 = 10^{-2}$	$0{,}092 = 9{,}2\cdot 10^{-2}$	$0{,}03\ \text{N} = 3\cdot 10^{-2}\ \text{N}$
$0{,}001 = 10^{-3}$	$0{,}092 = 92\cdot 10^{-3}$	$0{,}0072x = 7{,}2\cdot 10^{-3}x$
$0{,}0001 = 10^{-4}$	$0{,}00759 = 75{,}9\cdot 10^{-4}$	$0{,}0072x = 72\cdot 10^{-4}x$

$3{,}894\cdot 10^3 = 3894$ **Der positive Exponent einer Zehnerpotenz gibt an, um wieviele Stellen das Komma nach rechts**

$3{,}894\cdot 10^{-3} = 0{,}003894$ **und der negative, um wieviele Stellen das Komma nach links zu rücken ist.**

ZEHNERPOTENZEN bringen RECHENHILFEN

Zehnerpotenzen bieten vor allen Dingen dann Vorteile, wenn irgendwelche Berechnungen unübersehbare Dezimalzahlen enthalten.

Beispiele:

a) Das nebenstehende Beispiel wird so in Zehnerpotenzen zerlegt, daß ein leicht überschaubarer Ausdruck entsteht.

Jetzt wird nach den Potenzgesetzen zusammengefaßt, d. h., die Exponenten werden nach den Regeln für die Multiplikation addiert. Schließlich kann das Ergebnis noch dezimal geschrieben werden.

$$0{,}00007\cdot 0{,}003\cdot 500000$$
$$= 7\cdot 10^{-5}\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^5$$
$$= 7\cdot 3\cdot 5\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-3}\cdot 10^5$$
$$= 105\cdot 10^{-5-3+5}$$
$$= 105\cdot 10^{-3}$$
$$= 0{,}105$$

b) Noch deutlicher wird der Rechenvorteil durch Zehnerpotenzen bei diesem Beispiel. Hier ist wie folgt zu verfahren:

- Zähler und Nenner so in Produkte mit Zehnerpotenzen umwandeln, daß überschaubare Zahlen entstehen.
- Soweit wie möglich zusammenfassen.
- Koeffizienten berechnen und mit den Zehnerpotenzen multiplizieren.
- Dezimales Ergebnis angeben. Dieses sollte man jedoch nur dann angeben, wenn der Wert, wie in diesem Fall, überschaubar ist.

$$\frac{0{,}0003\cdot 4500000}{450\cdot 0{,}15}$$
$$= \frac{3\cdot 10^{-4}\cdot 45\cdot 10^5}{45\cdot 10^1\cdot 15\cdot 10^{-2}}$$
$$= \frac{3\cdot 45\cdot 10^{-4+5}}{45\cdot 15\cdot 10^{1-2}} = \frac{135\cdot 10^1}{675\cdot 10^{-1}}$$
$$= 0{,}2\cdot 10^{1+1} \qquad = 0{,}2\cdot 10^2$$
$$= 2\cdot 10^1 \qquad = 20$$

$1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}; 1\ \text{km} = 1000\ \text{m} = 10^3\ \text{m}$

$1\ \text{mg} = 10^{-3}\ \text{g};\ 1\ \text{MHz} = 10^6\ \text{Hz}$

In der Technik werden oftmals Größen mit einer Größenordnung von Zehnerpotenzen angewandt.

Zahlenwert	Benennung	Zehnerpotenz	Potenzbenennung	
1 000 000 000 000	Billion	10^{12}	Tera	T
1 000 000 000	Milliarde	10^{9}	Giga	G
1 000 000	Million	10^{6}	Mega	M
1 000	Tausend	10^{3}	Kilo	k
0,001	Tausendstel	10^{-3}	Milli	m
0,000 001	Millionstel	10^{-6}	Mikro	μ
0,000 000 001	Milliardstel	10^{-9}	Nano	n
0,000 000 000 001	Billionstel	10^{-12}	Pico	p

Da sehr häufig von einer Größe in die andere (z. B. nF in pF) umgerechnet werden soll, ist zur Vereinfachung die nachstehende Tabelle abgedruckt. Die Ablesung erfolgt genau wie bei den bekannten Entfernungstabellen.

Gegebene Größenordnung	Gewünschte Größenordnung T	G	M	k		m	μ	n	p	Gegebene Größenordnung
T	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	T
G	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	G
M	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	M
k	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	k
	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	
m	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	m
μ	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	μ
n	10^{-21}	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	n
p	10^{-24}	10^{-21}	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	p

Beachte: Linke untere Hälfte: von links (m) nach oben (1 m = 10^{-6} k)
Rechte obere Hälfte: von rechts (k) nach oben (1 k = 10^{6} m)

Beispiele:

a) 1 mA = ? A — 1 mA $= 10^{-3}$ A = 0,001 A

b) 1 MΩ = ? kΩ — 1 MΩ $= 10^{3}$ kΩ = 1000 kΩ

c) 5 pF = ? μF — 5 pF $= 5 \cdot 10^{-6}$ μF = 0,000005 μF

d) 5800 μm = ? m — 5800 μm $= 5800 \cdot 10^{-6}$ m $= 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ m = 0,0058 m

e) 58600 kHz = ? MHz — 58600 kHz $= 58600 \cdot 10^{-3}$ MHz = 58,6 MHz

f) 0,0004 μF = ? pF — 0,0004 μF $= 0{,}0004 \cdot 10^{6}$ pF $= 0{,}4 \cdot 10^{3}$ pF = 400 pF

g) 0,000 000 05 GHz = ? Hz

0,000 000 05 GHz
$= 0{,}000\,000\,05 \cdot 10^{9}$ Hz
$= 0{,}05 \cdot 10^{3}$ Hz
= 50 Hz

h) Sind in einer Aufgabe der Strom in mA und die Spannung in V angegeben, kann man den Widerstand sofort in kΩ ausdrücken.

$U = 60\,V;\ I = 20\,mA;\ R = ?$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{60\,V}{20\,mA} = = 3\,k\Omega$$

Begründung: 20 mA stehen für $20 \cdot 10^{-3}$ A; aus 10^{-3} im Nenner entstehen 10^{3} im Zähler, also die Größe k (Kilo).

$$R = \frac{60\,V}{20\,mA} = \frac{60\,V}{20 \cdot 10^{-3}\,A} = \frac{60\,V}{20\,A} \cdot 10^{3}$$

$$R = 3 \cdot 10^{3}\,\Omega = 3\,k\Omega$$

4.3 Radizieren (Wurzelziehen)

Das Radizieren ist die Umkehrung des Potenzierens. Wird aus dem Quadrat einer Zahl die Quadratwurzel gezogen, so ist der Wurzelwert gleich dem der ursprünglichen Zahl.

$\sqrt{5^2} = 5$

$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

$\boxed{\sqrt{a^2} = a}$

$\sqrt{16a^2} = \sqrt{(4a)^2} = 4a$

Wurzelexponent

$\sqrt[2]{a} = b$

Radikand (Wurzelbasis) — Wurzelwert

$\sqrt[2]{a}$ (gelesen: zweite Wurzel oder Quadratwurzel aus a) steht für die Zahl $b \in R_0^+$ (Menge der positiven reellen Zahl einschließlich der Zahl 0), deren Quadrat den Wert a hat.
Dabei wird $\sqrt{\ }$ als Wurzelzeichen, 2 als Wurzelexponent (kann bei der Quadratwurzel weggelassen werden), a als Wurzelbasis oder Radikand und b als Wurzelwert bezeichnet.

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

$\boxed{\sqrt[3]{a^3} = a \quad \sqrt[4]{a^4} = a}$

Ebenso wie die Quadratwurzel kann auch die dritte, vierte ... Wurzel gezogen werden. Da jedoch für die Anwendungen nur Quadratwurzeln in Frage kommen, werden wir uns auch darauf beschränken.

$b = \sqrt{a} \rightarrow b^2 = a$

Ist der Wurzelwert der Quadratwurzel aus a gleich b, muß auch die Umkehrung $b^2 = a$ gelten.

Aus dieser Regel lassen sich noch folgende Definitionen ableiten:

– Ist $a = 0$, so beträgt der Wurzelwert ebenfalls 0.

Steht für $a = 0$, so gilt $\boxed{\sqrt{0} = 0}$

– Das Quadrat einer Wurzel entspricht dem Radikanden der Quadratwurzel.

$(\sqrt{12})^2 = 12$ $\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2}$$
$$\text{kann sein} = \sqrt{(+4)(+4)} = +4$$
$$\text{oder} = \sqrt{(-4)(-4)} = -4$$
$$\sqrt{16} = \pm 4$$

Bisher wurden nur positive reelle Zahlen berücksichtigt. Steht a aber auch für negative Zahlen ($a \in R$), ist einleuchtend, daß

$$a^2 = (+a)(+a) \text{ oder } = (-a)(-a)$$

sein kann. Deshalb kann der Wurzelwert einer Quadratwurzel positiv und auch negativ sein. Im allgemeinen ist jedoch nur der positive Wurzelwert interessant. Von den beiden Wurzelwerten einer Quadratwurzel wird daher im allgemeinen auch nur der positive angegeben.

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(+a)^2} = \sqrt{(-a)^2} = \pm a$$

Berechnen von Quadratwurzeln

$$\sqrt{64} = 8$$
$$\sqrt{256} = 16$$
$$\sqrt{625} = 25$$
$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

Eine Quadratwurzel kann ohne Schwierigkeiten berechnet werden, wenn der Radikand selbst eine Quadratzahl ist. Für größere und unübersichtliche Radikanden werden Tabellen, der Rechenschieber oder ein elektronischer Rechner benutzt.

Eine sehr große Rechenhilfe bieten die Zehnerpotenzen. Hier gilt der folgende Merksatz:

$$\sqrt{10^2} = 10^{\frac{2}{2}} = 10^1 = 10$$
$$\sqrt{10^8} = 10^{\frac{8}{2}} = 10^4$$
$$\sqrt{10^{-4}} = 10^{\frac{-4}{2}} = 10^{-2}$$

Aus einer Zehnerpotenz wird die Wurzel gezogen, indem der Exponent durch 2 dividiert wird (Radizieren als Umkehrung des Potenzierens). Zu beachten ist dabei, daß der Exponent der Zehnerpotenz immer geradzahlig sein muß.

Beispiele:

a) Der Radikand ist zunächst als Zehnerpotenz zu schreiben und dann die Wurzel zu ziehen.

$$\sqrt{10000} = \sqrt{10^4} = 10^{\frac{4}{2}} = 10^2 = 100$$

b) Der Radikand wird in das Produkt eines übersichtlichen Werts mit einer geradzahligen Zehnerpotenz umgewandelt. Anschließend ist sowohl aus dem Koeffizienten als auch der Zehnerpotenz die Wurzel zu ziehen und der Zahlenwert anzugeben.

$$\sqrt{3\,240\,000} = \sqrt{324 \cdot 10^4} = \sqrt{324} \cdot \sqrt{10^4} = 18 \cdot 10^{\frac{4}{2}} = 18 \cdot 10^2 = 1800$$

c) Ist der Radikand eine Zehnerpotenz mit einem ungeraden Exponenten, muß wie folgt vorgegangen werden:

$$\sqrt{100\,000} = \sqrt{10^5}$$

– Zehnerpotenz in ein Produkt umwandeln, das eine Zehnerpotenz mit einem geradzahligen Exponenten enthält.

$$= \sqrt{10^1} \cdot \sqrt{10^4}$$

– Wurzel aus dem Koeffizienten und der Zehnerpotenz ziehen.

$$= 3{,}16 \cdot 10^{\frac{4}{2}}$$

– Produkt berechnen.

$$= 3{,}16 \cdot 10^2 = 316$$

d) Hier wird entsprechend, wie unter c) beschrieben, verfahren.

$$\sqrt{3\,600\,000} = \sqrt{3{,}6 \cdot 10^6} = 1{,}9 \cdot 10^3 = 1\,900$$

e) Auch bei Zahlen, die kleiner sind als 1, kann das Verfahren angewendet werden.

$$\sqrt{0{,}000002} = \sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}41 \cdot 10^{-3} = 0{,}00141$$

f) Stehen unter einer Wurzel physikalische Einheiten, dann muß auch daraus die Wurzel gezogen werden.

$$\sqrt{9\text{ m}^2} = 3\text{ m} \qquad \sqrt{25a^2} = 5a$$
$$\sqrt{169\,\Omega^2} = 13\,\Omega \qquad \sqrt{10\text{ V}^2} = 3{,}16\text{ V}$$

4.3.1 Addition und Subtraktion von Wurzeln

$$\sqrt{25} + \sqrt{25} = 2\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\boxed{2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 5\sqrt{a}}$$

Es können nur Wurzeln mit gleichem Radikanden und gleichem Exponenten addiert oder subtrahiert werden. Daraus resultiert die folgende Regel:

$$2\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = 3\sqrt{a}$$

Quadratwurzeln mit gleichem Radikanden und gleichem Exponenten werden addiert oder subtrahiert, indem ihre Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert werden und die Wurzel beibehalten wird.

Beispiele:

a) Enthält eine Aufgabe Wurzeln mit verschiedenen Radikanden, aber mit gleichen Exponenten, können nur jeweils gleiche Wurzeln zusammengefaßt werden. Man beachte, daß vor dem Wurzelzeichen der Multiplikationspunkt weggelassen werden kann.

$$2\sqrt{x} + 6\sqrt{y} - \sqrt{x} - 8\sqrt{y}$$
$$= 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 6\sqrt{y} - 8\sqrt{y}$$
$$= \sqrt{x} - 2\sqrt{y}$$

b) Steht unter dem Wurzelzeichen eine Summe, so ist immer zuerst die Summe zu berechnen und dann die Wurzel zu ziehen. Es darf auf gar keinen Fall die Summe in zwei Wurzeln aufgespalten werden.

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Vergleiche!

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

c) Zu berechnen ist der Wechselstromwiderstand einer Schaltung, deren ohmscher Widerstand 150 Ω und deren Blindwiderstand 890 Ω beträgt.

Formel: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

Größen einsetzen:

$Z = \sqrt{150^2\Omega^2 + 890^2\Omega^2}$

$Z = \sqrt{22500\Omega^2 + 792100\Omega^2}$

$Z = \sqrt{814600\Omega^2}$

$Z = \sqrt{81{,}4 \cdot 10^4\Omega^2} = 9{,}03 \cdot 10^2\Omega$

$Z = 903\ \Omega$

4.3.2 Multiplikation und Division von Wurzeln

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{16 \cdot 25}$

$= 4 \cdot 5 \qquad = \sqrt{400}$

$= 20 \qquad = 20$

Werden zwei Wurzeln miteinander multipliziert, können die Radikanden auch als Produkt unter ein Wurzelzeichen geschrieben werden.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ Das Produkt zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Beispiele:

a) Der Spannungsabfall an einem Widerstand bei gegebener Leistung wird nach der Formel $U = \sqrt{P \cdot R}$ berechnet. Wie groß ist die Spannung U in V (Volt), wenn die Leistung $P = 2\,\text{W} = 2\,\text{VA}$ und der Widerstand $R = 18\,\Omega = 18\frac{\text{V}}{\text{A}}$ beträgt?

Formel: $U = \sqrt{P \cdot R}$

$U = \sqrt{2\,\text{VA} \cdot 18\,\text{V/A}}$

$U = \sqrt{36\,\text{V}^2}$

$U = 6\,\text{V}$

b) Soll eine Wurzel mit einem Faktor multipliziert werden, besteht auch die Möglichkeit, ihn als Quadrat unter das Wurzelzeichen zu bringen und mit dem ursprünglichen Radikanden zu multiplizieren.

Diese Tatsache ist allgemeingültig in R_0^+ und kann als Formel geschrieben werden.

$3\sqrt{25} = 3 \cdot 5$ oder $3\sqrt{25} = \sqrt{3^2 \cdot 25}$

$= 15$

$= \sqrt{9 \cdot 25}$

$= \sqrt{225}$

$= 15$

$\boxed{a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}}$

c) Besteht ein Produkt aus Wurzeln und Koeffizienten, so bildet man zuerst das Produkt der Koeffizienten und anschließend das der Wurzeln.

$5\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}$

$= 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})$

$= 420 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{x})^2$

$= 420 \cdot 2 \cdot x$

$= 840x$

$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$ ODER! $\sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$

Werden zwei Wurzeln dividiert, so ist es auch möglich, die Radikanden als Quotient unter ein Wurzelzeichen zu schreiben. D. h., daß zuerst dividiert und dann die Wurzel gezogen werden kann.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ Der Quotient aus zwei Quadratwurzeln ist gleich dem Wurzelwert des Quotienten beider Radikanden.

Beispiele:

a) Man erspart sich einmal das Wurzelziehen, wenn man zunächst den Quotienten der Radikanden berechnet und dann die Wurzel zieht.

$\frac{\sqrt{2916}}{\sqrt{81}} = \sqrt{\frac{2916}{81}} = \sqrt{36} = 6$

$\frac{\sqrt{2985}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{2985}{15}} = \sqrt{199} = 14{,}1$

b) Die nebenstehende Formel (Resonanzfrequenz eines Schwingkreises) ist soweit wie möglich zu vereinfachen.

$f_0 = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot L \cdot C}}$

$\sqrt{1} = 1$ (Wurzel entfällt im Zähler)

$\sqrt{4\pi^2} = \sqrt{2^2\pi^2} = 2\pi$

$\sqrt{LC}$ bleibt im Nenner als Wurzel erhalten.

$f_0 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2 \cdot \pi^2} \cdot \sqrt{L \cdot C}}$

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

c) Oftmals ist es natürlich günstiger, zuerst beide Wurzeln zu ziehen und dann zu dividieren.

$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

4.3.3 Potenzieren und Radizieren von Wurzeln

$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4}$

$= 5^2$

$= 25$

$(\sqrt{a})^b = \sqrt{a^b}$ Eine Wurzel wird potenziert, indem der Radikand potenziert und aus der Potenz die Wurzel gezogen wird.

Beispiele:

a) Wird die Wurzel aus 2 quadriert, entsteht der Wurzelwert 2.

$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2$

b) Eine Summe unter der Wurzel ins Quadrat erhoben ergibt die Summe.

$(\sqrt{R^2 + X^2})^2 = \sqrt{(R^2 + X^2)^2}$

$= R^2 + X^2$

$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

Ausdrücke mit übergeordneten Wurzeln löst man von innen nach außen auf.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Wurzelexponenten als Produkt für eine Wurzel zu ermitteln. Das letztgenannte Verfahren ist aber für die Praxis ohne Bedeutung, da die Wurzelexponenten zu unübersichtlich werden.

$\sqrt{\sqrt{a^8}} = \sqrt[4]{a^8} = a^2$

$\sqrt{\sqrt{a^8}} = \sqrt{a^4} = a^2$

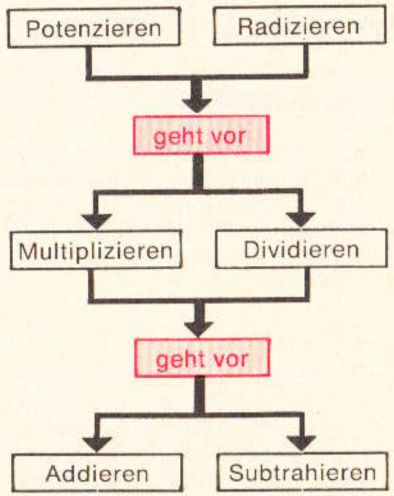
1. Eine Wurzel wird radiziert, indem der Radikand mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert wird.
2. Ausdrücke mit übergeordneten Wurzeln sind von innen nach außen schrittweise aufzulösen.

4.4 Zusammenstellung der Rechnungsarten der ersten drei Stufen

Stufe		Rechnungsart					
1. Stufe	Grundrechnungsart	Addieren (Zusammenzählen)	5 a Summand	+ + plus	3 b Summand	= = gleich	8 c Summe
	Umkehrung	Subtrahieren (Abziehen)	8 c Minuend	– – minus	3 b Subtrahend	= = gleich	5 a Differenz
2. Stufe	Grundrechnungsart	Multiplizieren (Malnehmen)	5 x Faktor	· · mal	6 y Faktor	= = gleich	30 z Produkt
	Umkehrung	Dividieren (Teilen)	30 z Dividend	: : durch	6 y Divisor	= = gleich	5 x Quotient
3. Stufe	Grundrechnungsart	Potenzieren (Eine Zahl wiederholt als Faktor setzen)	Basis	hoch	3^2 Exponent	= gleich	9 Potenzwert
	1. Umkehrung	Radizieren (Wurzelziehen)	Wurzelexponent		$\sqrt[2]{9}$ Radikand	=	3 Wurzelwert
	2. Umkehrung	Logarithmieren (Wird im Rahmen dieses Lehrbuches nicht behandelt)	Basis		$^{3}\log 9$ Numerus	=	2 Logarithmus (= Exponent)

Es gilt:

a) **Grundmenge der 1. und 2. Stufe:** Menge Q der rationalen Zahlen
b) **Grundmenge der 3. Stufe:** Menge R der reellen Zahlen



Enthält eine Aufgabe mehrere Grundrechnungsarten, so gilt der folgende Grundsatz:

Die Rechenart der höheren Stufe ist immer vor der der niederen Stufe durchzuführen.

Wenn innerhalb einer Berechnung multipliziert und addiert werden soll, dann muß zuerst die Multiplikation und anschließend die Addition durchgeführt werden.

Klammer immer zuerst ausrechnen!

Es besteht jedoch eine Ausnahme: Wenn die Rechnung eine Klammer enthält, muß die Klammer immer zuerst ausgerechnet werden.

5 Grafische Darstellungen (Funktionen)

5.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem

Viele mathematische und physikalische Zusammenhänge werden unter Zuhilfenahme eines Koordinatensystems dargestellt. Dabei sind folgende Begriffe von großer Wichtigkeit:

a) **Abszisse**

Die Abszisse ist die waagerechte oder *x*-Achse des Koordinatensystems. Auf der Abszisse werden immer die unabhängigen Größen aufgetragen. (Zum Vergleich: Sollen Spannung und Strom eines Stromkreises untersucht werden, wird immer die Spannung auf der Abszisse aufgetragen. Denn eine Spannungsänderung ist die Ursache (unabhängig Veränderliche) für eine Stromänderung. Der umgekehrte Vorgang wäre undenkbar.)

b) **Ordinate**

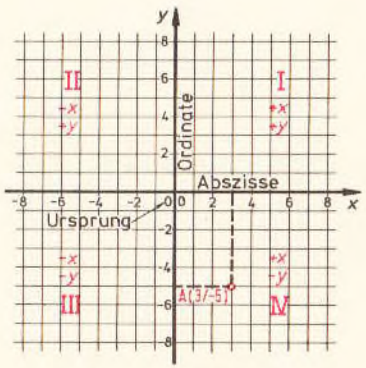
Als Ordinate oder *y*-Achse wird die senkrechte Achse des Koordinatensystems bezeichnet. Auf der Ordinate werden immer die von der unabhängigen Größe (z. B. Spannung) abhängigen Größen (z. B. Strom) aufgetragen.

c) **Ursprung**

Der Schnittpunkt beider Achsen wird als Ursprung bezeichnet.

d) **Quadranten**

Die einzelnen Felder I, II, III und IV nennt man Quadranten.



Der eingetragene Punkt A hat Koordinaten (3/−5). Dabei steht in der Klammer immer zuerst der *x*-Wert, also die unabhängig Veränderliche; nach dem Strich folgt der *y*-Wert.

Je eine Pfeilspitze am Ende der Abszissenachse und der Ordinatenachse zeigt an, in welcher Richtung die Koordinate wächst. Bei der Angabe von Zahlenwerten sind sämtliche negativen Werte mit einem Minuszeichen zu versehen. Die Nullpunkte beider Achsen werden durch eine Null bezeichnet, auch wenn beide Nullpunkte zusammenfallen (DIN 461).

An die Pfeilspitzen der Achsen nach rechts und nach oben werden die Quotienten aus Formelzeichen und Einheit eingetragen. Z. B.:

Strecke: $\frac{s}{\text{m}}$; $\frac{s}{\text{km}}$ oder $\frac{s}{\text{cm}}$

Spannung: $\frac{U}{\text{V}}$; $\frac{U}{\text{kV}}$ oder $\frac{U}{\text{mV}}$

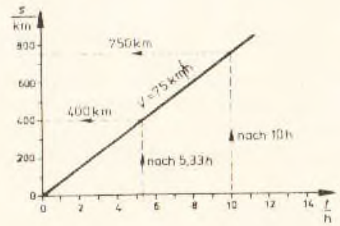
Strom: $\frac{I}{\text{A}}$; $\frac{I}{\text{mA}}$ oder $\frac{I}{\mu\text{A}}$

Häufig spricht man bei Darstellungen in Koordinatensystemen auch von **Diagrammen** oder, vor allem in der Elektronik, von **Kennlinien** bzw. **Kennlinienfeldern.**

Beispiele:

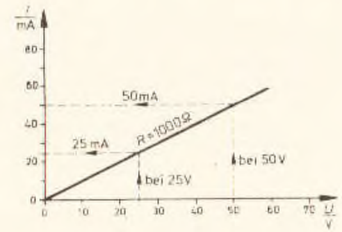
a) **Weg-Zeit-Diagramm**

Hier wird die gefahrene Strecke eines Fahrzeugs untersucht, das eine gleichbleibende Geschwindigkeit von 75 km/h hat. Da die gefahrene Strecke von der Zeit abhängig ist, wird die Strecke *s* auf der Ordinate und die Zeit *t* auf der Abszisse aufgetragen.



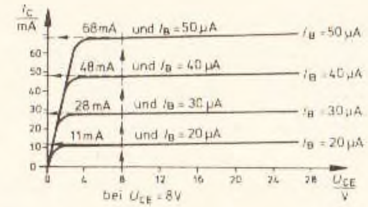
b) **Widerstandskennlinie**

Der Widerstand eines Stromkreises beträgt 1000 Ω; er ist konstant. Es soll nun untersucht werden, wie sich der Strom bei einer Spannungserhöhung verhält. Da der Strom von der Spannung abhängig ist, wird er auf der Ordinate und die Spannung auf der Abszisse aufgetragen.



c) **Ausgangskennlinienfeld eines Transistors**

Sind in einem Koordinatensystem mehrere Diagramme mit verschiedenen Parametern[1] (hier I_B) eingetragen, dann spricht man von einem Kennlinienfeld.



[1] Parameter = Eine Einflußgröße, die während der Betrachtung (z. B. auch Messung) jeweils konstant bleibt.

5.2 Funktionen und ihre grafische Darstellung

Unter einer Funktion versteht man die Zuordnung zweier veränderlicher Größen.

Die Zuordnung kann dabei entweder auf mathematischen Zusammenhängen beruhen (Formel), oder sie ergibt sich ausschließlich durch Beobachtung oder Messung (z. B. Kennlinie einer Halbleiter-Diode). Läßt sich der Zusammenhang durch eine Formel ausdrücken und somit exakt berechnen, so spricht man von einer **analytischen**[1] **Funktion.** Dagegen spricht man von einer **empirischen**[2] **Funktion,** wenn sich der Zusammenhang nur durch Beobachtung oder Messung ermitteln läßt.

Für eine Funktion läßt sich eine sogenannte Wertetabelle aufstellen. Die jeweils zugeordneten Werte lassen sich mit Hilfe analytischer Funktionen berechnen; für empirische Funktionen werden sie gemessen und in einer Meßwertreihe zusammengestellt. Zugeordnete Wertepaare werden so neben- oder untereinandergesetzt, daß jeweils links oder oben die unabhängig Veränderliche steht.

Beispiele:

a) Es soll das Widerstandsverhalten eines NTC-Widerstands unter dem Einfluß der Temperatur untersucht werden (empirische Funktion). Der Widerstandswert R ist abhängig von der Temperatur ϑ; die eingestellte Temperatur wird links und der gemessene Widerstandswert rechts eingetragen.

$\frac{\vartheta}{°C}$	$\frac{R}{k\Omega}$
20	10,00
30	7,10
40	5,13
50	3,71
60	2,65
70	1,90
80	1,45
90	1,10
100	0,85

b) Wertetabellen können auch nach bekannten mathematischen oder physikalischen Gesetzmäßigkeiten erstellt werden (analytische Funktion).

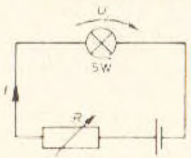
Es soll untersucht werden, wie groß Strom und Spannung an einem Widerstand bei einer bestimmten Leistung sein dürfen. Um die Wertetabelle aufzustellen, muß die Formel

$$P = U \cdot I$$

nach I umgestellt werden (die abhängige Größe steht immer links vom Gleichheitszeichen).

$$I = \frac{P}{U}$$

(bei $P = 5$ W): $I = \frac{5\,\text{W}}{U}$



[1] analytisch = durch Auflösung
[2] empirisch = durch Erfahrung

Werden jetzt Werte für die Spannung eingesetzt, ergeben sich die dazugehörigen Ströme.

Nebenrechnung	$\frac{U}{V}$	$\frac{I}{mA}$
$I = \frac{5\,\text{W}}{10\,\text{V}} = 500$ mA	10	500
$I = \frac{5\,\text{W}}{15\,\text{V}} = 333$ mA	15	333
$I = \frac{5\,\text{W}}{20\,\text{V}} = 250$ mA	20	250
$I = \frac{5\,\text{W}}{25\,\text{V}} = 200$ mA	25	200
$I = \frac{5\,\text{W}}{30\,\text{V}} = 166$ mA	30	166
$I = \frac{5\,\text{W}}{35\,\text{V}} = 143$ mA	35	143
$I = \frac{5\,\text{W}}{40\,\text{V}} = 125$ mA	40	125
$I = \frac{5\,\text{W}}{45\,\text{V}} = 111$ mA	45	111
$I = \frac{5\,\text{W}}{50\,\text{V}} = 100$ mA	50	100

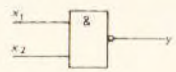
Allgemeine Schreibweise: $I = f(U)_{P = 5\,\text{W}}$

c) Beim nebenstehenden NAND-Glied wird nach den Ausgangssignalen gefragt. Dabei bedeutet Signal 0 keine Spannung und Signal 1 Spannung.

Ein NAND-Glied besteht aus einer Reihenschaltung eines UND- und eines NICHT-Gliedes.

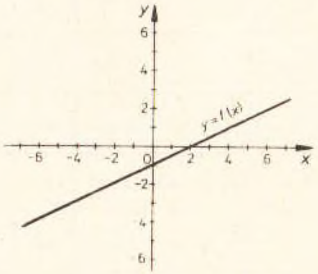
Auch hier gilt die allgemeine Funktionsschreibweise:

$$y = f(x)$$



Eingang 1 x_1	Eingang 2 x_2	Ausgang y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5.2.1 Diagramme



Wird eine Funktion in einem Koordinatensystem dargestellt, dann erhält man ein Diagramm oder ein Schaubild.

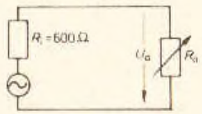
Grafische Darstellungen haben gegenüber Wertetabellen den Vorteil, daß sie ein optisches Bild über den Verlauf einer Funktion wiedergeben. Dadurch ist eine bessere Übersicht der Zusammenhänge gegeben. Aus diesem Grund wird oftmals für eine Wertetabelle noch zusätzlich ein Diagramm gezeichnet.

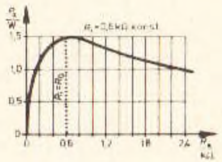
Beispiele:

a) Für den nebenstehenden Stromkreis ist das Diagramm der Funktion

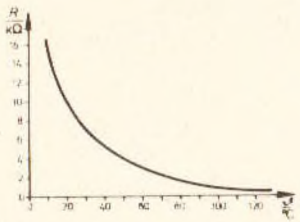
$$P_a = f(R_a)$$

gezeichnet worden. Bei der Untersuchung wurde deutlich, daß dann die größte Leistung am Lastwiderstand umgesetzt wird, wenn dessen Widerstandswert gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist (vgl.: Leistungsanpassung $R_a = R_i$).

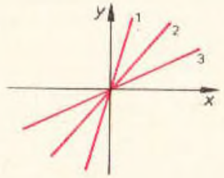




b) Das nebenstehende Diagramm zeigt den Kennlinienverlauf eines NTC-Widerstands. Hier wird sehr deutlich, daß eine grafische Darstellung bedeutend übersichtlicher als eine Wertetabelle ist (vgl.: Wertetabelle im Abschn. 5.2, Beispiel a).

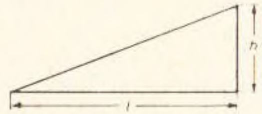


5.2.2 Lineare Funktion / Funktionsgleichung



Lineare Funktionen mit unterschiedlichen Steigungen

Innerhalb dieses Abschnitts soll nur die Funktionsgleichung der linearen Funktion behandelt werden. Eine lineare Funktion beschreibt in ihrem Kurvenverlauf immer eine Gerade.



$$\boxed{\text{Steigung} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}} \qquad m = \frac{h}{\ell}}$$

Begriff der Steigung:

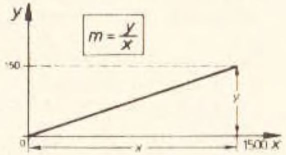
Aus dem Straßenverkehr ist der Begriff der Steigung bekannt. Steht an einem Verkehrsschild 10 % Steigung, dann bedeutet das, daß bei einer Länge von 100 m ein Höhenunterschied von 10 m zurückgelegt werden muß. Die Steigung wird berechnet, indem der Quotient aus der Höhe h und der Länge ℓ gebildet wird.

$$m = \frac{10\text{ m}}{100\text{ m}} = 0{,}1 = 10\,\%$$

$$h = m \cdot \ell$$

$$h = 0{,}1 \cdot 1500\text{ m} = 150\text{ m}$$

Soll berechnet werden, wie groß der Höhenunterschied nach 1500 m ist, so muß er 10 % von 1500 m betragen, also $0{,}1 \cdot 1500\text{ m} = 150\text{ m}$.



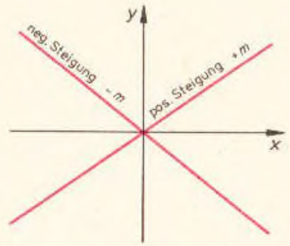
Wird die obere Darstellung in ein Koordinatensystem mit den Achsen y und x übertragen, dann gilt auch hier:

bei $m = 0{,}1 \ldots\ y = 0{,}1 \cdot x$

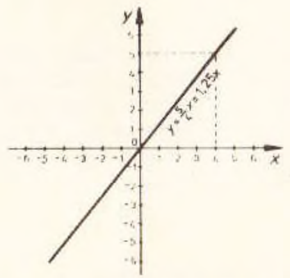
$y = 0{,}1 \cdot 1500$

$y = 150$

Die Steigung m ist der Quotient aus Höhe und Länge bzw. y und x. Die Steigung sagt aus, in welchem Verhältnis y zu x steht.



Verläuft eine Gerade von links unten nach rechts oben, ist ihre Steigung positiv. Die Steigung ist dagegen negativ, wenn die Gerade von rechts unten nach links oben verläuft (Gefälle = negative Steigung).



Allgemeine Form: $y = m \cdot x$

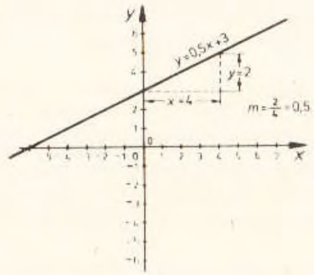
Steigung ermitteln: $m = \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Funktionsgleichung: $y = 1{,}25x$

Eine Funktion $y = f(x)$, deren Gerade durch den Ursprung eines Koordinatensystems verläuft, wird durch die Gleichung

$$\boxed{y = m \cdot x}$$

beschrieben. Dabei ist die Steigung m ein konstanter Faktor, der angibt, in welchem Verhältnis die abhängig Veränderliche y gegenüber der Unabhängigen x steht. Ferner drückt sie aus, ob eine Gerade relativ steil oder flach verläuft; je größer die Steigung, desto steiler verläuft auch die Gerade.



Die bisher betrachteten Geraden verliefen alle durch den Ursprung des Koordinatensystems. Die Funktionsgleichung

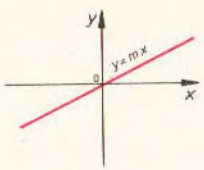
$y = 0{,}5x + 3$

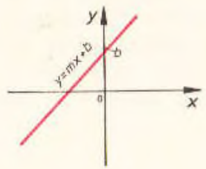
bei $x = 0$
$y = 0{,}5 \cdot 0 + 3$
$y = 0 + 3$
$y = 3$

beschreibt eine Gerade, die die y-Achse bei $y = +3$ schneidet. Der Wert 3 gibt also den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse an. Es kann demnach für eine beliebige Gerade die Funktionsgleichung

$$\boxed{y = mx + b}$$

geschrieben werden.





Eine Funktion, deren Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft, wird durch die Geradengleichung

$$y = m \cdot x$$

bestimmt.

Schneidet eine Gerade in einem beliebigen Punkt die y-Achse, so wird sie durch die Gleichung

$$y = m \cdot x + b$$

beschrieben. Dabei steht b für den Wert, bei dem die Gerade die y-Achse schneidet.

Bei $x = 0$ gilt: $y = m \cdot 0 + b = b$.

Beispiele:

a) Aus der gegebenen Funktionsgleichung

$$y = 0{,}5x - 4$$

soll eine Gerade gezeichnet werden. Dabei ist wie folgt vorzugehen:

1. Aus der gegebenen Gleichung müssen mindestens zwei Punkte – besser drei – berechnet werden.

   Punkt A: Anstelle der Variablen x wird der Wert 0 in die Gleichung eingesetzt. Da die Gerade die y-Achse bei $y = -4$ schneidet, muß sich bei $x = 0$ auch der Wert -4 ergeben.

   $y = 0{,}5 \cdot 0 - 4 = -4$

   Punkt B: Anstelle von x wird ein Wert eingesetzt, der möglichst weit am Rand unseres Koordinatensystems liegt. Es wurde der Wert $x = 8$ gewählt.

   Um die Gerade exakt zeichnen zu können und um Rechenfehler auszuschalten, wird noch ein dritter Punkt bestimmt.

   Punkt C: Es wird ein x-Wert genommen, der im negativen Bereich liegt: $x = -6$.

2. **Zeichnen der Geraden**

   Nachdem das Koordinatensystem gezeichnet wurde, trägt man die Punkte A, B und C ein und verbindet anschließend die Punkte mit einem Lineal. Die Gerade ist entstanden.

   Sollte ein Punkt außerhalb dieser Geraden liegen, dann liegt ein Rechenfehler vor; es sind also die einzelnen Werte noch einmal nachzurechnen.

Beachte: Eine Gerade ist durch zwei Punkte in ihrem Verlauf bestimmt!

Der Punkt A hat die Koordinaten

$$A = (0/-4)$$

Punkt B: Für $x = 8$ ergibt sich:

$y = 0{,}5 \cdot 8 - 4$
$y = 4 - 4$
$y = 0$

Die Koordinaten des Punktes B:

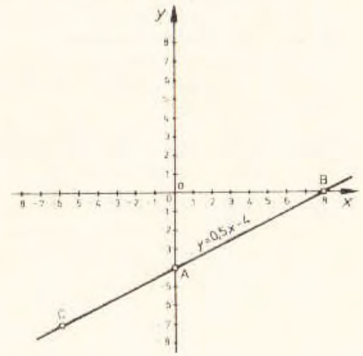
$$B = (8/0)$$

Punkt C: Für $x = -6$ erhält man

$y = 0{,}5 \cdot (-6) - 4$
$y = -3 - 4$
$y = -7$

Die Koordinaten des Punktes C:

$$C = (-6/-7)$$



b) Das Temperaturverhalten eines ohmschen Widerstands ($\alpha = 0{,}004\ °C^{-1}$) soll in einem Bereich von $20\ °C < \vartheta < 100\ °C$ grafisch dargestellt werden. Der Kaltwiderstand $R_{20} = 10\ k\Omega$.

Funktionsgleichung: $R_W = R_{20} + R_{20}\,\alpha\,\Delta\vartheta$

Umformen: $R_W = \underbrace{R_{20} \cdot \alpha}\cdot\underbrace{\Delta\vartheta} + \underbrace{R_{20}}$

Es kann ein unmittelbarer Vergleich zu einer Funktionsgleichung durchgeführt werden:

Steigung m entspricht $(R_{20} \cdot \alpha)$,

Unabhängige x entspricht $\Delta\vartheta$,

Konstante b entspricht R_{20}.

Zum Vergleich: $y = m \cdot x + b$

$\Delta\vartheta = \vartheta - 20\ °C$

Da von einer Temperatur von 20 °C ausgegangen wird, legt man den Ursprung bei 20 °C fest.

Allgemeine Funktionsgleichung:
$R_W = f(\vartheta) = f(\Delta\vartheta)$

Punkt A wird bei einer Temperatur von 20 °C berechnet. Der Temperaturunterschied $\Delta\vartheta$ beträgt dabei 0. Also ist hier R_W gleich dem Widerstandswert bei 20 °C.

Punkt A bei 20 °C; $\Delta\vartheta = 0\ °C$

$R_W = (10 \cdot 0{,}004 \cdot 0 + 10)\ k\Omega$

$R_W = R_{20} = 10\ k\Omega$

Punkt B erhält man, wenn anstelle der Temperatur ein Wert von z. B. 100 °C eingesetzt wird. Es ergibt sich ein Widerstandswert $R_W = 13{,}2\ k\Omega$.

Punkt B bei 100 °C; $\Delta\vartheta = 80\ °C$

$R_W = (10\,000 \cdot 0{,}004 \cdot 80 + 10\,000)\ \Omega$

$R_W = (3200 + 10\,000)\ \Omega$

$R_W = 13\,200\ \Omega = 13{,}2\ k\Omega$

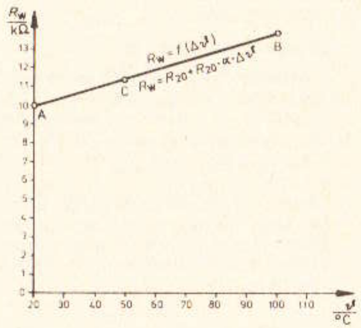
Nachdem die beiden Punkte errechnet wurden, werden sie in das Koordinatensystem eingetragen und durch eine Gerade miteinander verbunden.

Zur Sicherheit kann noch ein dritter Punkt C berechnet werden, z. B. für die Temperatur 50 °C.

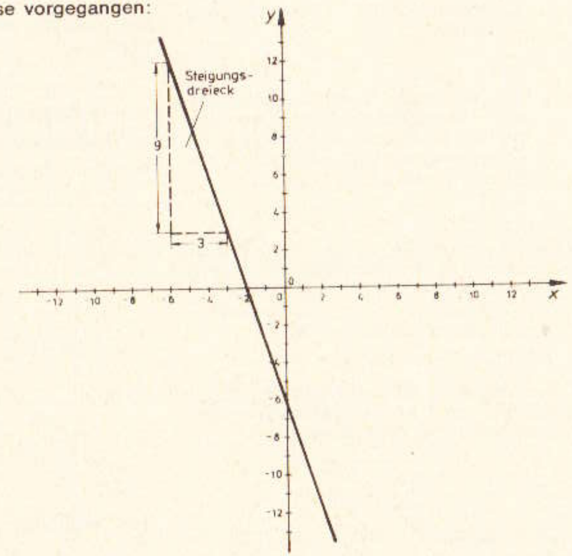
$R_W = (10\,000 \cdot 0{,}004 \cdot 30 + 10\,000)\ \Omega$

$R_W = (1200 + 10\,000)\ \Omega$

$R_W = 11\,200\ \Omega = 11{,}2\ k\Omega$



c) Innerhalb dieses Beispiels soll die Funktionsgleichung für eine gegebene Gerade bestimmt werden. Auch hier wird wieder schrittweise vorgegangen:



1. **Ermitteln der Steigung**
   Zur Berechnung der Steigung wird ein beliebiges „Steigungsdreieck" gezeichnet, aus dem der Quotient von Höhe und Länge gebildet wird. Ferner ist zu beachten, daß die Steigung hier negativ ist, da die Gerade von rechts unten nach links oben verläuft.

Beachte: Zur Berechnung der Steigung werden die **Seiten** des Steigungsdreieckes verwendet!

$$m = -\frac{9}{3} = -3$$

2. **Bestimmen der Konstanten b**
   Die Konstante b entspricht dem y-Wert, bei dem die Gerade die y-Achse schneidet.

Die Gerade schneidet die y-Achse bei $y = -6$; also ist

$$b = -6$$

3. Unter der Berücksichtigung von m und b kann die Geradengleichung geschrieben werden.

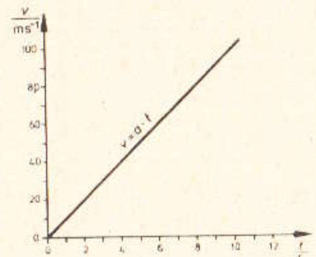
Allgemeine Form: $y = mx + b$

Funktionsgleichung: $y = -3x - 6$

d) In dem nebenstehenden Diagramm ist v über t aufgetragen, d. h.

$$v = f(t).$$

Es ist ersichtlich, daß die Geschwindigkeit v mit der Zeit t gleichförmig zunimmt. Es soll nun die Funktionsgleichung für diese Gerade bestimmt werden.



1. **Berechnen der Steigung**

   Bei der Berechnung der Steigung fällt auf, daß sie genau der physikalischen Größe Beschleunigung entspricht.

$$m = \frac{v}{t} = \frac{100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\,\text{s}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10\,\text{ms}^{-2}$$

Die Steigung m entspricht der Beschleunigung a:

$$a = 10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

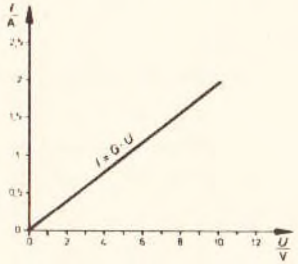
2. Da die Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft, beträgt die Konstante $b = 0$, und die Funktionsgleichung kann sofort angegeben werden.

Im y-x-Diagramm: $y = mx$
Im v-t-Diagramm: $v = at$
Funktionsgleichung: $v = 10 \cdot t$

e) Wie groß ist der Leitwert des Stromkreises, dessen Verhalten durch das nebenstehende Diagramm dargestellt wird? Auch hier kann eine Funktionsgleichung angegeben werden:

$I = f(U)$; vgl.: $y = f(x)$.

Die Steigung läßt sich aus dem Quotienten von I und U bestimmen, was dem Leitwert G entspricht.



$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\,\text{A}}{10\,\text{V}} = 0{,}2\,\text{S}$$

(S = Siemens)

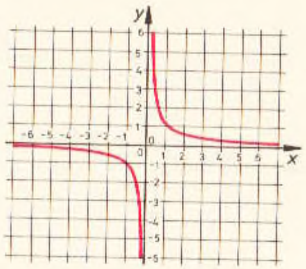
Schließlich wird die Funktionsgleichung bestimmt:

$I = G \cdot U = 0{,}2 \cdot U$

Zum Vergleich: $m = \frac{y}{x} = \frac{I}{U}$

Zum Vergleich: $y = m \cdot x$
$I = G \cdot U$

5.2.3 Umkehrfunktion



Das Diagramm der Umkehrfunktion wird Hyperbel genannt und durch die Funktionsgleichung

$$\boxed{y = \frac{1}{x}} \quad (\text{bzw. } y = \frac{a}{bx})$$

beschrieben.

Anstelle der Zahl 1 kann im Nenner eine andere Zahl und vor dem x noch ein zusätzlicher Faktor stehen. Dabei ändert sich nichts am typischen Verlauf der Hyperbel.

Die Hyperbel hat zwei Kennlinienäste, die im I. und III. Quadranten verlaufen. Die Äste berühren erst im Unendlichen die x- und y-Achse.

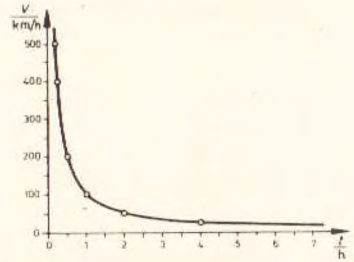
Beispiel:

Zeichnen der Hyperbel mit der Funktionsgleichung: $v = \frac{100\,\text{km}}{t}$

Wertetabelle

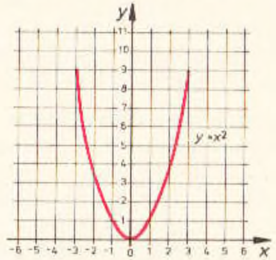
$\frac{v}{\text{km/h}}$	500	400	200	100	50	25	10	5
$\frac{t}{\text{h}}$	0,2	0,25	0,5	1	2	4	10	20

Da hier nur positive Geschwindigkeiten interessieren, genügt eine Darstellung der Hyperbel im I. Quadranten.



Beachte: Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Zeit, in der die 100 km zurückgelegt werden, stetig ab.

5.2.4 Quadratische Funktion



Das Schaubild der quadratischen Funktion ist die Parabel. Die Funktionsgleichung lautet:

$$\boxed{y = x^2}$$

Wegen des quadratischen Gliedes entstehen nur positive y-Werte. Die Parabel verläuft also nur im I. und II. Quadranten.

Die Funktionswerte einer Parabel mit der Funktionsgleichung $y = x^2$ sind immer positiv. Die beiden Äste der Parabel verlaufen im Unendlichen parallel.

Beispiel:

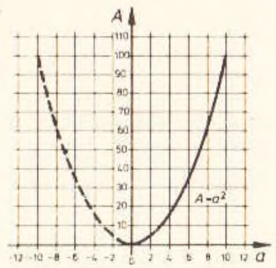
Da die Parabel das Schaubild der Funktionsgleichung $y = x^2$ ist, kann sie auch der grafischen Darstellung des Flächeninhaltes von Quadraten mit beliebigen Kantenlängen dienen.

Zum Vergleich: $y = x^2$

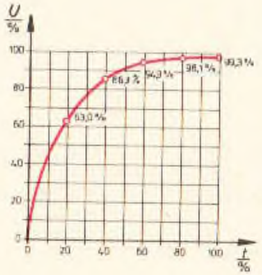
Flächeninhalt eines Quadrates: $A = a^2$

Wertetabelle für $A = a^2$

Kantenlänge a	Fläche A
0,5	0,25
0,8	0,64
1	1
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100



5.2.5 e-Funktion (Funktion des natürlichen Wachstums)



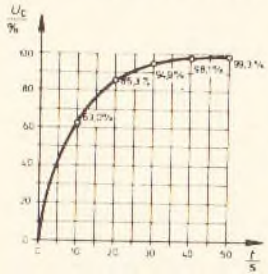
Mittels der e-Funktion werden viele Wachstumsvorgänge in der Natur, z. B. die Erwärmung eines Gegenstandes, der Spannungsverlauf bei der Aufladung eines Kondensators usw., beschrieben. Kennzeichnend für den Verlauf dieser Kurve ist der anfänglich steile Anstieg (fast lineares Verhalten) und das anschließende Abflachen der Kurve.

Teilt man die insgesamt notwendige Zeit t, in der z. B. ein Kondensator sich auf seine Höchstspannung aufgeladen hat, in 5 gleich lange Abschnitte ein, so ergeben sich die im Diagramm jeweils prozentual angegebenen Zwischenwerte.

Um den Verlauf der e-Funktion näher kennenzulernen, wird das oben genannte Beispiel aus der Elektrotechnik gewählt. An eine Gleichspannungsquelle von 100 V soll ein Kondensator von 10 μF in Reihe mit einem Widerstand von 1 MΩ angeschlossen werden. Schaltet man den Stromkreis ein, so lädt sich der Kondensator nach einer Zeit von 50 s auf nahezu den vollen Spannungswert. Die Spannung am Kondensator (U_C) wird alle 10 s gemessen und die Meßwerte in eine Tabelle eingetragen.

t = Zeit, gemessen in Sekunden

U_C = Spannung am Kondensator in Volt



für U
= 100 V
≙ 100 %

t/s	U/V
10	63
20	86,3
30	94,9
40	98,1
50	99,3

Eine e-Funktion entsteht, wenn man die Dauer von Wachstumsvorgängen in 5 gleich lange Abschnitte unterteilt und dabei dem **1. Abschnitt 63 %**, dem **2. Abschnitt 86,3 %**, dem **3. Abschnitt 94,9 %**, dem **4. Abschnitt 98,1 %** und dem **5. Abschnitt 99,3 %** vom Endwert (100 %) zuordnet. Die Funktion strebt schließlich einem Sättigungswert (100 %) zu.

6 Gleichungen 1. Grades

Im Abschnitt 3 wurden anhand einfacher Gleichungen die grundsätzlichen Regeln erläutert, mit deren Hilfe sich Gleichungen und Formeln nach der gesuchten Größe – der Variablen – umstellen und somit lösen lassen. Hier soll auf Gleichungen 1. Grades eingegangen werden, die nebeneinander Rechnungsarten verschiedener Stufen sowie Klammern und Brüche enthalten. Die im Abschnitt 3 erläuterten Grundsätze gelten auch für Gleichungen mit Rechnungsarten mehrerer Rechnungsstufen:

- **Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn mit beiden gesamten (!) Seiten der Gleichung die gleiche Rechenoperation mit derselben Größe durchgeführt wird.**
- **Zur Bestimmung der Unbekannten (Variablen) muß eine Gleichung so umgestellt werden, daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens die unbekannten Glieder und auf der anderen Seite die bekannten Glieder stehen.**
- **Um eine Größe von der einen Seite auf die andere Seite des Gleichheitszeichens zu bringen, muß die betreffende Größe auf beiden Seiten mit dem entgegengesetzten Rechenzeichen der gleichen Rechenstufe in die Gleichung eingeführt werden. Wichtig ist dabei, daß die Rechenoperationen jeweils mit beiden gesamten Seiten einer Gleichung durchgeführt werden.**
- **Die Seiten einer Gleichung sind gegeneinander vertauschbar.**
- **Beim Umstellen von Gleichungen und Formeln ist die Beachtung der „Rangordnung" der Rechenstufen wichtig:**

Hohe Stufe = Potenzieren/Radizieren,
mittlere Stufe = Multiplizieren/Dividieren,
untere Stufe = Addieren/Subtrahieren.

Größen, die durch Rechenzeichen der höheren Stufe verbunden sind, können nicht durch Rechnungen einer niedrigeren Stufe getrennt werden:

$x \cdot y \cdot z - x \rightarrow$ nicht durchführbar!

$x \cdot y \cdot z \; : \; x \rightarrow$ durchführbar $\frac{xyz}{x} = yz$.

In den folgenden Abschnitten werden an Beispielen die Lösungsmöglichkeiten für Gleichungen 1. Grades aufgezeigt. Dabei werden die jeweils mit beiden Seiten gleichzeitig durchgeführten Rechenoperationen durch Rotdruck gekennzeichnet.

Gleichungen 1. Grades werden auch als lineare Gleichungen bezeichnet. Sie enthalten die Variable höchstens in der 1. Potenz.

6.1 Einfache Gleichungen 1. Grades

Die gebräuchlichste Form ist die Bestimmungsgleichung. Bei ihr gilt es, die nur einmal oder auch mehrmals in einer Gleichung (Formel) vorkommende Unbekannte (Variable) durch geeignete Rechenoperationen auf einer Seite des Gleichheitszeichens freizustellen und damit bestimmbar zu machen.

Beispiele:

a)

$$4x + 5 = 8 + x$$
$$4x + 5 - 5 = 8 - 5 + x$$
$$4x = 8 - 5 + x$$
$$4x - x = 8 - 5 + x - x$$
$$3x = 3$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$
$$x = 1$$

Wie bereits angedeutet, muß die Gleichung erst geordnet werden, d. h., sie muß durch die bereits bekannten Rechenoperationen so umgeformt werden, daß auf der einen Seite die bekannten und auf der anderen Seite die unbekannten Glieder stehen. Der nächste Schritt wäre das Zusammenfassen; schließlich wird durch den Faktor von x dividiert, und die Gleichung ist gelöst.

Hier noch einmal in Kurzform die einzelnen durchgeführten Schritte bis zur Lösung. Nach einiger Übung wird der Seitenwechsel der Glieder nach dem folgenden Schema durchgeführt:

$$4x + 5 = 8 + x \quad | -x;\ -5$$ 1. Schritt: Ordnen!

$$4x - x = 8 - 5$$ 2. Schritt: Zusammenfassen!

$$3x = 3$$ 3. Schritt: Durch den Faktor von x dividieren!

$$x = \frac{3}{3}$$
$$x = 1$$

b)

$$ax + b = c + x$$
$$ax + b - b = c + x - b$$
$$ax - x = c + x - x - b$$
$$ax - x = c - b$$
$$x(a - 1) = c - b$$
$$\frac{x(a-1)}{(a-1)} = \frac{c-b}{a-1}$$
$$x = \frac{c-b}{a-1}$$

Hier nun ein Beispiel mit allgemeinen Zahlen. Das Verfahren ist genauso wie bei den bestimmten Zahlen. Jedoch muß beim Zusammenfassen in den meisten Fällen das x ausgeklammert werden.

$$\frac{a(c-b)}{a-1} + b = c + \frac{c-b}{a-1}$$
$$\frac{a(c-b)}{a-1} + \frac{b(a-1)}{a-1} = \frac{c(a-1)}{a-1} + \frac{c-b}{a-1}$$
$$a(c-b) + b(a-1) = c(a-1) + c - b$$
$$ac - ab + ab - b = ac - c + c - b$$
$$ac - b = ac - b$$

Probe:
Diese Probe ist schon ein wenig kompliziert. Zuerst müssen alle Brüche gleichnamig gemacht werden, damit die Nenner verschwinden. Werden jetzt die Klammern ausmultipliziert, erkennt man, daß die Lösung der Gleichung richtig war.

c)

$$ax - b = a - bx$$ 1. Ordnen!

$$ax - b + bx = a - bx + bx$$
$$ax - b + b + bx = a + b$$ 2. Da die Unbekannte x hier als Faktor in zwei Gliedern auftritt, wird sie ausgeklammert.

$$ax + bx = a + b$$
$$x(a + b) = a + b \quad | : (a + b)$$ 3. Durch den Klammerausdruck dividieren!

$$\frac{x(a+b)}{a+b} = \frac{a+b}{a+b}$$
$$x = 1$$

d)

$$7x - 15 = 2x + 10$$ 1. Ordnen!

$$7x - 15 + 15 = 2x + 10 + 15$$
$$7x - 2x = 2x - 2x + 10 + 15$$ 2. Zusammenfassen!

$$5x = 25 \quad | :5$$ 3. Durch 5 dividieren!

$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$$
$$x = 5$$

e)

$$\sqrt{4x + 9} = 5$$
$$(\sqrt{4x + 9})^2 = (5)^2$$
$$4x + 9 = 25$$
$$4x + 9 - 9 = 25 - 9$$
$$4x = 16$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$$
$$x = 4$$

Da die Umkehrung des Wurzelrechnens das Potenzieren ist, müssen in diesem Fall beide Seiten der Gleichung quadriert werden. Anschließend wird die $+9$ durch die Subtraktion -9 aufgehoben. Nach dem Zusammenfassen wird die Gleichung durch 4 dividiert, um die durch Multiplikation mit der Unbekannten verbundene Zahl 4 aufzuheben. Jetzt können wir das Ergebnis angeben.

Als oberster Grundsatz gilt bei **Gleichungen mit Klammern,** daß diese zuerst aufzulösen sind. Nachdem dieser erste Schritt durchgeführt wurde, ist die Gleichung wie üblich zu lösen.

Beispiele:

a)

$$4x - (5 - 2x) = 5x - 3$$
$$4x - 5 + 2x = 5x - 3$$
$$4x - 5 + 5 + 2x = 5x - 3 + 5$$
$$4x + 2x - 5x = 5x - 5x - 3 + 5$$
$$4x + 2x - 5x = -3 + 5$$
$$x = 2$$

Als erstes wird die Klammer unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln aufgelöst! Dann wird geordnet. Schließlich wird zusammengefaßt und das Ergebnis geschrieben.

Probe:

$$4 \cdot 2 - (5 - 2 \cdot 2) = 5 \cdot 2 - 3$$
$$8 - 5 + 4 = 10 - 3$$
$$7 = 7$$

b)

$$7x + (3 - 10) = 11x - (19 - 2x)$$

$$7x + 3 - 10 = 11x - 19 + 2x$$

1. Klammern auflösen!

$$7x - 7 = 13x - 19$$

2. Um die Gleichung übersichtlicher zu machen, fassen wir erst einmal zusammen!

$$7x - 13x - 7 = 13x - 13x - 19$$

3. Ordnen!

$$-6x - 7 + 7 = -19 + 7$$

4. Zusammenfassen!

$$-6x = -12 \quad | :(-6)$$

5. Durch (-6) dividieren!

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{-12}{-6}$$

$$x = 2$$

c)

$$a - (x - 2b) = -(-3a - 2b)$$

$$a - x + 2b = 3a + 2b$$

$$a - a - x + 2b - 2b = 3a + 2b - a - 2b$$

$$-x = 2a \quad | \cdot (-1)$$

$$-x(-1) = 2a(-1)$$

$$x = -2a$$

Auch hier gilt:

1. Klammern auflösen!
2. Ordnen!
3. Zusammenfassen!
4. Um das negative Vorzeichen vor dem x zu entfernen, wird die gesamte Gleichung mit (-1) multipliziert.

Probe:

$$a - (-2a - 2b) = -(-3a - 2b)$$

$$a + 2a + 2b = 3a + 2b$$

$$3a + 2b = 3a + 2b$$

d)

$$4(10 - 2x) = 3(x - 5)$$

$$40 - 8x = 3x - 15$$

$$40 - 8x - 3x = 3x - 3x - 15$$

$$40 - 40 - 11x = -15 - 40$$

$$-11x = -55 \quad | : -11$$

$$\frac{-11x}{-11} = \frac{-55}{-11}$$

$$x = 5$$

Enthält eine Gleichung Klammern in Verbindung mit der Multiplikation, so ist auch in dem Falle die Klammer zuerst aufzulösen! Auch bei dieser Aufgabe hat die Unbekannte ein negatives Vorzeichen. Es gibt zwei Möglichkeiten, das negative Vorzeichen zu beseitigen: entweder man multipliziert mit (-1) oder man dividiert durch den Faktor von x einschließlich des negativen Vorzeichens (s. Beispiel).

e)

$$(a - x)(1 - x) = x^2 - b$$

$$a - ax - x + x^2 = x^2 - b \quad \left| \begin{matrix} -x^2 \\ -a \end{matrix} \right.$$

$$-ax - x = -b - a \quad | \cdot (-1)$$

$$ax + x = a + b$$

$$x(a + 1) = a + b \quad | :(a+1)$$

$$x = \frac{a + b}{a + 1}$$

Man geht wieder schrittweise vor:

1. Klammern auflösen!
2. Ordnen!
3. Um die Vorzeichen umzukehren, multiplizieren wir die Gleichung mit (-1)!
4. Zusammenfassen!
5. Durch $(a + 1)$ dividieren!

6.2 Bruchgleichungen

Bei einer Bruchgleichung sind immer zuerst die Nenner zu beseitigen. Das geschieht, indem die gesamte Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner multipliziert wird. Da im Hauptnenner sämtliche Nenner als Faktor enthalten sind, kann gekürzt werden, wodurch die Nenner entfallen.

Beispiele:

a)

$$\frac{6(x + 2)}{5} = \frac{3(x + 4)}{5} \quad | \cdot 5$$

$$\frac{\cancel{5} \cdot 6(x + 2)}{\cancel{5}} = \frac{\cancel{5} \cdot 3(x + 4)}{\cancel{5}}$$

$$6(x + 2) = 3(x + 4)$$

$$6x + 12 = 3x + 12$$

$$6x - 3x = 12 - 12$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

Die einfachste Form der Bruchgleichung ist dann gegeben, wenn alle vorkommenden Brüche gleichnamig sind. In diesem Fall sind beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner zu multiplizieren, wodurch die Brüche wegfallen. Dann können die Klammern aufgelöst werden; anschließend wird geordnet, zusammengefaßt und durch den Faktor von x dividiert.

Probe:

$$\frac{6(0 + 2)}{5} = \frac{3(0 + 4)}{5}$$

$$\frac{12}{5} = \frac{12}{5}$$

b)

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$$

1. HN bestimmen!
   HN $= 2 \cdot 3 = 6$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = 5$$

2. Brüche gleichnamig machen!

$$\frac{3x + 2x}{6} = 5 \quad | \cdot 6$$

3. Brüche zusammenfassen!

$$\frac{(3x + 2x)\,6}{6} = 5 \cdot 6$$

4. Mit 6 multiplizieren!

$$3x + 2x = 30$$

5. Kürzen!

$$5x = 30 \quad | :5$$

6. Zusammenfassen!

$$\frac{5x}{5} = \frac{30}{5}$$

7. Dividieren!

$$x = 6$$

c)

$$\frac{x}{a} + b = c$$

$$\frac{ax}{a} + ab = ac \quad | \cdot a$$

$$x + ab = ac \quad | -ab$$

$$x = ac - ab$$

$$x = a(c - b)$$

Ist nur ein Bruch innerhalb einer Bruchgleichung vorhanden, so ist sie mit dem Nenner dieses Bruches zu multiplizieren. In diesem Zusammenhang sei noch einmal darauf hingewiesen, daß **jedes Glied der Gleichung** mit dem gemeinsamen Nenner zu multiplizieren ist, auch die ganzen Zahlen.

d) $$\frac{4x+9}{10} - \frac{x+5}{5} = \frac{7x-1}{25} - \frac{x+3}{20}$$
$$\text{HN} = 100$$
$$\frac{10(4x+9)-20(x+5)}{100} = \frac{4(7x-1)-5(x+3)}{100}$$
$$40x+90-20x-100 = 28x-4-5x-15$$

Es empfiehlt sich, zunächst auf jeder Seite zusammenzufassen.

$$20x - 10 = 23x - 19$$
$$20x - 23x = -19 + 10$$
$$-3x = -9$$
$$x = 3$$

Enthalten die Zähler der Brüche Summen, so ist immer darauf zu achten, daß ein Bruchstrich die gleiche Bedeutung wie eine Klammer hat. Das bedeutet, daß beim Auflösen der Brüche unbedingt auf die Vorzeichenregeln zu achten ist. Am besten setzt man um jeden Zähler eine Klammer und löst sie später wieder auf. Werden beide Seiten mit dem HN (hier: 100) multipliziert, so fallen die Brüche weg.

Probe:

$$\frac{4 \cdot 3 + 9}{10} - \frac{3+5}{5} = \frac{7 \cdot 3 - 1}{25} - \frac{3+3}{20}$$
$$\frac{21}{10} - \frac{8}{5} = \frac{20}{25} - \frac{6}{20}$$
$$\frac{21-16}{10} = \frac{80-30}{100} = \frac{10(8-3)}{100} = \frac{8-3}{10}$$
$$\frac{5}{10} = \frac{5}{10}$$

e)

$$s = \frac{x \cdot t}{x+t} \quad \Big| \cdot (x+t)$$
$$s(x+t) = \frac{x \cdot t \cdot (x+t)}{(x+t)}$$
$$sx + st = tx$$
$$sx - tx = -st \quad \Big| \cdot (-1)$$
$$tx - sx = st$$
$$x(t-s) = st \quad \Big| : (t-s)$$
$$\frac{x(t-s)}{t-s} = \frac{st}{t-s}$$
$$x = \frac{st}{t-s}$$

1. Mit dem Nenner $(x + t)$ multiplizieren und kürzen!
2. Klammer auflösen!
3. Ordnen!
4. Vorzeichenwechsel!
5. Unbekannte ausklammern!
6. Dividieren!

f)

$$6 = \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}} \leftarrow \text{HN} = 2x$$
$$6 = \frac{2}{\frac{x}{2x} - \frac{2}{2x}}$$
$$6 = \frac{2}{\frac{x-2}{2x}}$$

Kehrwert des unteren Bruches

$$6 = 2 \cdot \frac{2x}{x-2} \quad \Big| \cdot (x-2)$$
$$6(x-2) = \frac{2 \cdot 2x \cdot (x-2)}{(x-2)}$$
$$6x - 12 = 4x$$
$$6x - 4x - 12 + 12 = 4x - 4x + 12$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

1. **Beachte:** Bei Gleichungen mit Doppelbrüchen ist **immer** zuerst der Doppelbruch zu entfernen!
   In diesem Fall bringt man die Nennerbrüche auf einen gemeinsamen Nenner (hier $2x$). Anschließend dividiert man die beiden Brüche, indem mit dem Kehrwert des Nennerbruches multipliziert wird.
2. Mit $(x - 2)$ multiplizieren!
3. Klammern auflösen!
   Kürzen!
4. Ordnen!
5. Zusammenfassen!
6. Durch 2 dividieren!

g)

$$u = \frac{ab - \frac{1}{ax}}{c}$$
$$u = \frac{\frac{abax - 1}{ax}}{c}$$
$$u = \frac{a^2bx - 1}{acx}$$
$$uacx = a^2bx - 1$$
$$uacx - a^2bx = -1$$
$$x(uac - a^2b) = -1$$
$$x = \frac{-1}{uac - a^2b}$$
$$x = \frac{-1}{a(uc - ab)}$$

1. Doppelbruch entfernen!
   (Die oberen beiden Brüche gleichnamig machen und zusammenfassen; anschließend dividieren: Bruch durch Zahl.)
2. Mit dem Nenner multiplizieren und kürzen!
3. Ordnen!
4. x ausklammern!
5. Durch den Faktor von x (Klammerausdruck) dividieren!

h)

$$\frac{x}{a+x} = \frac{b}{c} \quad \Big| \cdot c(a+x)$$
$$x \cdot c = b(a+x)$$
$$xc = ab + bx$$
$$xc - xb = ab$$
$$x(c-b) = ab \quad \Big| : (c-b)$$
$$x = \frac{ab}{c-b}$$

1. HN bestimmen!
   HN $= (a + x)\,c$
2. Mit dem HN multiplizieren und kürzen!
3. Klammern auflösen!
4. Ordnen!
5. Zusammenfassen durch Ausklammern!
6. Dividieren!

i)

Auch bei der nebenstehenden Gleichung gehen wir wieder schrittweise vor:

$$\frac{x}{u} + \frac{x}{v} + \frac{x}{w} = t$$

1. HN bestimmen!

$$\text{HN} = uvw$$

2. Mit dem HN multiplizieren und kürzen!

$$\frac{uvwx}{u} + \frac{uvwx}{v} + \frac{uvwx}{w} = uvwt$$

$$vwx + uwx + uvx = tuvw$$

3. x ausklammern!

$$x\,(vw + uw + uv) = tuvw$$

4. Durch den Klammerausdruck dividieren!

$$x = \frac{tuvw}{vw + uw + uv}$$

j)

In diesem Beispiel ist wiederum darauf zu achten, daß der Bruchstrich die gleiche Bedeutung wie eine Klammer hat.

$$\frac{a + b}{c + x} = \frac{a - b}{c - x}$$

1. HN bestimmen!

$$\text{HN} = (c + x)\,(c - x)$$

2. Gleichung mit dem HN multiplizieren und kürzen!

$$(a + b)\,(c - x) = (a - b)\,(c + x)$$

3. Klammer auflösen!

$$ac - ax + bc - bx = ac + ax - bc - bx$$

4. Ordnen!

$$-\,ax - bx - ax + bx = ac - bc - ac - bc$$

5. Zusammenfassen!

$$-\,2ax = -\,2bc$$

6. Durch den Faktor von x dividieren!

$$x = \frac{-\,2bc}{-\,2a}$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

k)

1. Um sich bei diesen Gleichungstypen Rechenarbeit zu ersparen, wird zuerst die rechte Seite gleichnamig gemacht und addiert.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$$

2. Da nach x umgestellt wird und x der Kehrwert von $1/x$ ist, kann jetzt von beiden Seiten der Gleichung der Kehrwert gebildet (Zähler und Nenner vertauscht) werden.

$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

6.3 Das Umstellen physikalischer Formeln

a)

Gegebene Formel: $R_w = R_{20}\,(1 + \alpha\Delta\vartheta)$

gesucht: $\Delta\vartheta$

$$R_w = R_{20}\,(1 + \alpha\Delta\vartheta)$$

1. Klammer auflösen!

$$R_w = R_{20} + \alpha R_{20}\Delta\vartheta$$

2. Ordnen!

$$\alpha R_{20}\Delta\vartheta = R_w - R_{20}$$

3. Durch den Faktor von $\Delta\vartheta$ dividieren!

$$\Delta\vartheta = \frac{R_w - R_{20}}{\alpha R_{20}}$$

b)

gesucht: $R_a = ?$

1. Da die gesuchte Größe R_a in Klammern steht, Klammern auflösen!

$$U = I\,(R_i + R_a)$$

$$U = IR_i + IR_a$$

2. Ordnen!

$$-\,IR_a = IR_i - U$$

3. Damit die Vorzeichen umgekehrt werden, mit (-1) multiplizieren!

$$IR_a = U - IR_i$$

4. Durch den Faktor von R_a dividieren!

$$R_a = \frac{U - IR_i}{I} = \frac{U}{I} - \frac{IR_i}{I}$$

$$R_a = \frac{U}{I} - R_i$$

c)

Auch hier handelt es sich um eine einfache Bruchgleichung.

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{gesucht: } R_2 = ?$$

1. Mit dem Nenner multiplizieren!

$$R\,(R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2$$

2. Klammer auflösen!

$$R\,R_1 + R\,R_2 = R_1 \cdot R_2$$

3. Ordnen!

$$R \cdot R_2 - R_1 \cdot R_2 = -\,R \cdot R_1$$

4. Zusammenfassen!

$$R_2\,(R - R_1) = -\,R \cdot R_1 \quad \big|\; :(R - R_1)$$

5. Durch den Faktor von R_2 dividieren!

$$\frac{R_2\,(R - R_1)}{(R - R_1)} = \frac{-\,R \cdot R_1}{(R - R_1)} \quad \Big|\; \begin{array}{l}\text{Erweitern}\\ \text{mit } (-1)\end{array}$$

6. Ergebnis bestimmen!
(Der Bruch rechts vom Gleichheitszeichen wurde mit (-1) erweitert, um ein angenehmeres Rechnen mit den Größen zu erhalten.)

$$R_2 = \frac{-\,R \cdot R_1 \cdot (-1)}{(R - R_1) \cdot (-1)}$$

$$R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$$

d)

Hier liegt eine sog. Wurzelgleichung vor. Mit ihr wird praktisch genauso umgegangen wie mit einer Gleichung mit Klammern. Es muß also als erstes das Wurzelzeichen entfernt werden. Das geschieht, indem beide Seiten der Gleichung quadriert werden; denn Wurzel und Quadrat heben sich gegenseitig auf.

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \text{gesucht: } R = ?$$

1. Quadrieren!

$$Z^2 = \left(\sqrt{R^2 + X^2}\right)^2$$

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

2. Ordnen!

$$R^2 = Z^2 - X^2$$

3. Damit die gesuchte Größe R nicht in einer Potenz steht, muß jetzt wieder die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen werden.

$$\sqrt{R^2} = \sqrt{Z^2 - X^2}$$

$$R = \sqrt{Z^2 - X^2}$$

e) $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{gesucht: } I_1 = ?$$

$$I_1 = \frac{R_2 \cdot I_2}{R_1}$$

Um diese Gleichung zu lösen, muß nur mit dem Glied multipliziert werden, das den Nenner unter der Unbekannten bildet. Es handelt sich hier um eine typische Verhältnisgleichung. Da man die Seiten und die Zähler und Nenner vertauschen kann, sollte man immer die unbekannte Größe links oben in den Zähler setzen.

Beachte:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

f) $$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C} \qquad \text{gesucht: } f = ?$$

Wir gehen wieder schrittweise vor:

$$2\pi f C \cdot 2\pi f L = 1$$
$$f^2 2^2 \pi^2 CL = 1$$

1. Mit dem Nenner multiplizieren!
2. Zusammenfassen!

$$f^2 = \frac{1}{2^2\pi^2 CL}$$

3. Durch die Faktoren von f^2 dividieren!

$$\sqrt{f^2} = \sqrt{\frac{1}{2^2\pi^2 CL}}$$

4. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen!

$$f = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2\pi^2 CL}}$$
$$f = \frac{1}{\sqrt{2^2\pi^2}\cdot\sqrt{CL}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$$

5. Ergebnis bestimmen!
Dabei wird die Wurzel rechts vom Gleichheitszeichen so lange zerlegt, bis die einfachste Form entsteht.

g) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{gesucht: } R_1 = ?$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$$
$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2R_3 - RR_3 - RR_2}{RR_2R_3}$$
$$R_1 = \frac{RR_2R_3}{R_2R_3 - RR_3 - RR_2}$$

Bei dieser Art von Aufgaben ist es ratsam, zuerst einmal die Gleichung so umzustellen, daß links die gesuchte Größe als Bruch steht. Dann sollte man rechts die Brüche gleichnamig machen und anschließend die Zähler und Nenner auf der rechten und linken Seite vertauschen.

h) $$I = \frac{nU}{\frac{n}{p}R_i + R_A} \qquad \text{gesucht: } p = ?$$

$$I = \frac{nU}{\frac{nR_i + pR_A}{p}}$$

1. Nennerbrüche gleichnamig machen und zusammenfassen!

$$I = \frac{p \cdot n \cdot U}{nR_i + pR_A}$$

2. Doppelbruch dividieren!

$$I \cdot (n \cdot R_i + pR_A) = p \cdot n \cdot U$$

3. Mit $(nR_i + pR_A)$ multiplizieren!

$$I \cdot n \cdot R_i + I \cdot p \cdot R_A = p \cdot n \cdot U$$
$$p \cdot n \cdot U - I \cdot p \cdot R_A = I \cdot n \cdot R_i$$

4. Ordnen!

$$p\,(n \cdot U - I \cdot R_A) = I \cdot n \cdot R_i$$

5. Zusammenfassen!

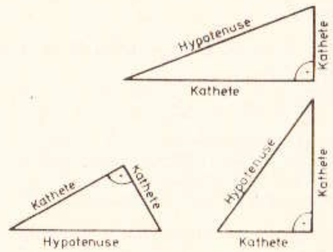
$$p = \frac{I \cdot n \cdot R_i}{n \cdot U - I \cdot R_A}$$

6. Durch Faktor von p (Klammerausdruck) dividieren!

7 Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken

7.1 Merkmale des rechtwinkligen Dreiecks

Formen rechtwinkliger Dreiecke:

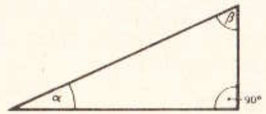


Rechtwinklige Dreiecke sind durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

a) Es ist immer ein rechter Winkel vorhanden.

b) Die längste Seite wird als Hypotenuse bezeichnet. Sie liegt immer dem rechten Winkel gegenüber.

c) Die kürzeren, am rechten Winkel liegenden Seiten, werden Katheten genannt.



$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Da in einem rechtwinkligen Dreieck stets ein rechter Winkel, also ein Winkel von 90°, vorhanden ist, muß die Summe der beiden anderen Winkel ebenfalls 90° betragen (Summe aller Winkel = 180°). Ist also ein Winkel bekannt, wobei der rechte Winkel ausgenommen ist, kann der andere bestimmt werden.

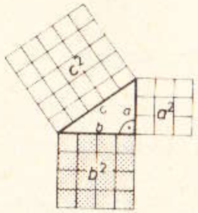
Beispiel:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Winkel α mit 32,2° angegeben. Wie groß ist der Winkel β?

Die Summe der Winkel α und β beträgt bekanntlich 90°. Nach dem Umstellen der Formel und Einsetzen des Werts für α kann der Winkel β bestimmt werden.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$
$$\beta = 90^\circ - 32{,}2^\circ$$
$$\beta = 57{,}8^\circ$$

7.2 Lehrsatz des Pythagoras

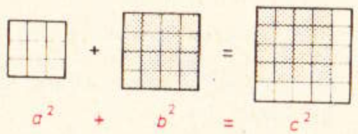


Ergänzt man die drei Seiten des Dreieckes zu Quadraten, so stellt sich heraus, daß die Summe der Flächen der Kathetenquadrate gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates ist.

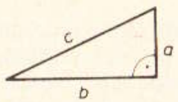
Beweis:

Wenn $a = 3$; $b = 4$ und $c = 5$ ist, dann gilt:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$25 = 25$$



Die Summe der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.



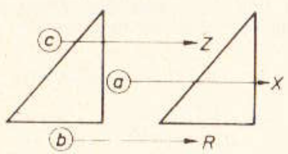
Für das Dreieck mit den Seiten a (Kathete), b (Kathete) und c (Hypotenuse) ergeben sich die folgenden Formeln:

$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	Hypotenuse c
$a^2 = c^2 - b^2$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	Kathete a
$b^2 = c^2 - a^2$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$	Kathete b

Beispiele:

Für die folgenden Beispiele sollen die Seiten a, b und c des Dreiecks umbenannt werden. Die Begründung liegt einfach darin, daß eine unmittelbare Beziehung zur Anwendung in der Wechselstromlehre dargestellt werden soll.

Wird anstelle von a der Buchstabe X, von b ein R und von c ein Z gewählt, so ergibt sich für die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes die nebenstehende Formel.



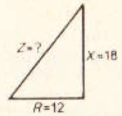
Zum Vergleich:

$c^2 = b^2 + a^2$

mit: $Z^2 = R^2 + X^2$

bzw.: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

a) Die Seiten eines Dreiecks sind mit $R = 12$ und $X = 18$ gegeben. Wie lang ist die Hypotenuse Z?



In die Grundformel die Größen einsetzen und die Wurzel berechnen.

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$
$$Z = \sqrt{12^2 + 18^2}$$
$$Z = \sqrt{144 + 324}$$
$$Z = \sqrt{468}$$
$$Z = 21{,}63$$

b) Die Grundformel $Z^2 = R^2 + X^2$ ist nach R und X umzustellen.

Zunächst ist nach R^2 bzw. X^2 umzuformen, anschließend auf beiden Seiten die Wurzel zu ziehen, um schließlich die gewünschte Größe zu erhalten.

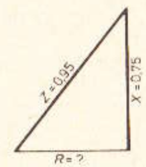
$Z^2 = R^2 + X^2$	$Z^2 = R^2 + X^2$
$R^2 = Z^2 - X^2$	$X^2 = Z^2 - R^2$
$\sqrt{R^2} = \sqrt{Z^2 - X^2}$	$\sqrt{X^2} = \sqrt{Z^2 - R^2}$
$\boxed{R = \sqrt{Z^2 - X^2}}$	$\boxed{X = \sqrt{Z^2 - R^2}}$

c) Es ist die Länge der Kathete X zu berechnen, wenn die Seiten R mit 56,8 und Z mit 196 angegeben sind.

Nachdem die bekannten Größen in die Wurzel eingesetzt wurden, müssen die Quadrate und anschließend deren Differenz berechnet werden. Die Wurzel wird unter Zuhilfenahme der Zehnerpotenzen gezogen.

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2}$$
$$X = \sqrt{196^2 - 56{,}8^2}$$
$$X = \sqrt{38416 - 3226}$$
$$X = \sqrt{35190}$$
$$X = \sqrt{3{,}5190 \cdot 10^4}$$
$$X = 1{,}876 \cdot 10^2$$
$$X = 187{,}6$$

d) Bei gegebenen $Z = 0{,}95$ und $X = 0{,}75$ soll die Seite R bestimmt werden.



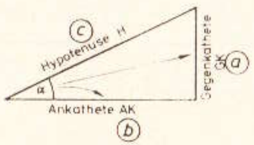
In die Formel Größen einsetzen und quadrieren.

Aus der Differenz (gerundet) wird mit Hilfe der Zehnerpotenzen die Wurzel gezogen und das Ergebnis angegeben.

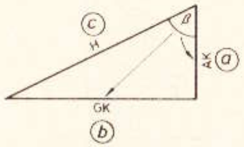
$$R = \sqrt{Z^2 - X^2}$$
$$R = \sqrt{0{,}95^2 - 0{,}75^2}$$
$$R = \sqrt{0{,}9025 - 0{,}5625}$$
$$R = \sqrt{0{,}34}$$
$$R = \sqrt{34} \cdot \sqrt{10^{-2}}$$
$$R = 5{,}83 \cdot 10^{-1}$$
$$R = 0{,}583$$

7.3 Winkelfunktionen

7.3.1 Allgemeines

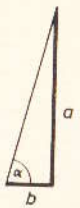


Geht man von dem Winkel α aus, so bildet die Seite a die Gegenkathete (GK), da sie dem Winkel α gegenüberliegt. Die Seite b, die an dem Winkel anliegt, wird als Ankathete (AK) bezeichnet.



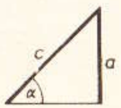
Wird jedoch von dem Winkel β ausgegangen, dann ist b die Gegenkathete und a die Ankathete. In jedem Fall ist c als längste Seite die Hypotenuse (H).

Die Kathete, die an dem betrachteten Winkel liegt, heißt Ankathete (AK); die Kathete, die gegenüber dem Winkel liegt, wird Gegenkathete (GK) genannt. Die längste Seite heißt Hypotenuse (H).

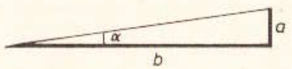


$\frac{a}{b}$ ... groß: großer $\sphericalangle\, \alpha$

Die nebenstehenden Abbildungen zeigen, daß die Größe eines Winkels von den Längen der Seiten a, b und c abhängt. Setzt man die Seiten a, b und c in ein Verhältnis zueinander, so müssen sich Zahlenwerte ergeben, die etwas über die Größe eines Winkels aussagen.

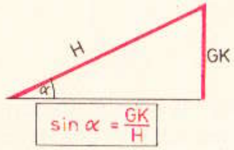


$\frac{a}{c}$ ... mittel: mittlerer $\sphericalangle\, \alpha$



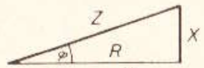
$\frac{a}{b}$ ... klein: kleiner $\sphericalangle\, \alpha$

7.3.2 Sinus-Funktion



Das Verhältnis aus Gegenkathete (GK) und Hypotenuse (H) wird als Sinus (abgekürzt: *sin*) bezeichnet. Damit wird jedem Winkel ein bestimmter Quotient zugeordnet. Dieser Quotient kann niemals größer als 1 sein, da die Hypotenuse immer größer als irgendeine Kathete ist und im Nenner des Bruchs steht.

Der Sinus ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse. Der Wert des Sinus ist niemals größer als 1.



$\sin \varphi = \frac{X}{Z}$

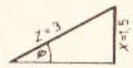
Um auch hier eine direkte Beziehung zur Wechselstromlehre herzustellen, werden die Seiten mit R, X und Z und der Winkel mit φ bezeichnet.

Beispiele:

a) Gemessener Winkel: $\varphi = 30°$

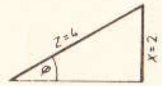
$$\sin \varphi = \frac{GK}{H} = \frac{X}{Z} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

Wir merken uns: $\sin 30° = 0{,}5$



b) Wieder ein Dreieck mit dem Winkel $\varphi = 30°$, jedoch mit anderen Seiten X und Z.

$$\sin 30° = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

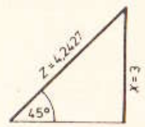


$\sin 30° = 0{,}5$

Beachte: Weitere Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen bei gleichem Winkel ergeben immer ein Seitenverhältnis und damit einen sin-Wert von 0,5 (: 1).

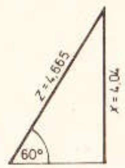
c) Hier ein Dreieck mit einem Winkel $\varphi = 45°$.

Die Seiten X und Z stehen im Verhältnis: $\frac{X}{Z} = \frac{3}{4{,}2427} = 0{,}7071$.



d) Und nun ein Dreieck mit einem Winkel von 60°.

Das Verhältnis $\frac{X}{Z} = \frac{4{,}04}{4{,}665} = 0{,}8660$ ist gleich dem Funktionswert des $\sin 60° = 0{,}8660$.



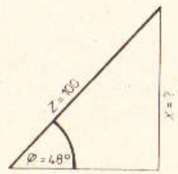
e) Schließlich ein Dreieck mit dem Winkel $\varphi = 75°$.
Hier beträgt das Verhältnis
$$\frac{X}{Z} = \frac{5{,}26}{5{,}45} = 0{,}965$$
Der Funktionswert des *sin* 75° beträgt also 0,965.

$$sin\,\varphi = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{H}} \rightarrow \mathrm{GK} = sin\,\varphi \cdot \mathrm{H}$$
$$\rightarrow \mathrm{H} = \frac{\mathrm{GK}}{sin\,\varphi}$$

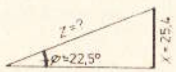
Mit Hilfe der *sin*-Funktion können auch die Länge der Hypotenuse und der Gegenkathete berechnet werden.

Beispiele:

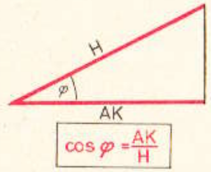
a) Wie lang ist die Kathete X, wenn $\varphi = 48°$ und die Hypotenuse mit $Z = 100$ gegeben ist?
Die Gleichung
$$sin\,\varphi = \frac{X}{Z}$$
wird nach X umgestellt:
$$X = Z \cdot sin\,\varphi$$
$$X = 100 \cdot sin\,48°$$
$$X = 100 \cdot 0{,}74314$$
$$X = 74{,}314$$



b) Wie lang muß die Seite Z gewählt werden, wenn die Gegenkathete X mit 25,4 und der Winkel φ mit 22,5° festgelegt wurden?
Die Gleichung
$$sin\,\varphi = \frac{X}{Z}$$
wird nach Z umgestellt:
$$Z = \frac{X}{sin\,22{,}5°}$$
$$Z = \frac{25{,}4}{0{,}38268}$$
$$Z = 66{,}37$$

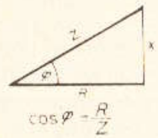


7.3.3 Cosinus-Funktion



Setzt man die Länge der Ankathete (AK) und die der Hypotenuse (H) in ein Verhältnis zueinander, dann wird der Quotient als Cosinus (abgekürzt: *cos*) bezeichnet. Auch der Wert der *cos*-Funktion kann niemals größer als 1 werden, da die Hypotenuse als größte Seite des Dreiecks im Nenner des Bruchs steht.

Der Cosinus ist das Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse. Der Funktionswert des Cosinus ist niemals größer als 1.

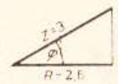


Nachdem die Seiten des Dreiecks mit R, X und Z und der Winkel mit φ bezeichnet wurden, ergibt sich für den *cos* des Winkels die nebenstehende Formel.

Beispiele:

Um einen direkten Vergleich zur *sin*-Funktion zu haben, sollen dieselben Dreiecke wie in Abschn. 7.3.2 gewählt werden.

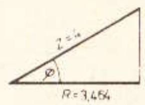
a) Gemessener Winkel: $\varphi = 30°$



Setzt man die Seiten R und Z zueinander ins Verhältnis, ergibt sich:
$$\frac{R}{Z} = \frac{2{,}6}{3} = 0{,}867$$ (3. Stelle aufgerundet)

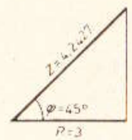
Der genaue Wert für *cos* 30° beträgt 0,866.

b) Gemessener Winkel $\varphi = 30°$



Auch dieses Mal bleibt das Verhältnis gleich:
$$\frac{R}{Z} = \frac{3{,}464}{4} = 0{,}866$$

c) Da bei dem Dreieck mit dem Winkel $\varphi = 45°$ die Längen der Ankathete und Gegenkathete gleich sind, müssen auch die Funktionswerte von *sin* 45° und *cos* 45° gleich sein. Es verhält sich
$$\frac{R}{Z} = \frac{3}{4{,}2427} = 0{,}7071 = cos\,\varphi$$



d) In dem Dreieck mit dem Winkel $\varphi = 60°$ verhalten sich die Seiten R und Z wie folgt zueinander:

$$\frac{R}{Z} = \frac{2{,}33}{4{,}66} = 0{,}5000$$

Dieses Verhältnis entspricht dem *cos*-Funktionswert von 60°.

e) Bei 75° ergibt sich das Seitenverhältnis zu:

$$\frac{R}{Z} = \frac{1{,}411}{5{,}452} = 0{,}2588 = \cos\varphi$$

Schließlich noch der genauere Tabellenwert:

$$\cos 75° = 0{,}25882$$

Umformungen:

$$\cos = \frac{AK}{H} \rightarrow AK = \cos \cdot H$$

$$\rightarrow H = \frac{AK}{\cos}$$

Ebenso wie bei der *sin*-Funktion können durch Umstellen der Ausgangsformel bei zwei gegebenen Größen (Winkel und eine Seite) die entsprechenden fehlenden Größen berechnet werden. Bei gegebener Hypotenuse und bekanntem Winkel wird durch die *cos*-Funktion die Ankathete und durch die *sin*-Funktion die Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt.

Beispiele:

a) In einem Dreieck ist der Winkel φ mit 48,9° und die Ankathete mit $R = 200$ angegeben. Wie groß ist Z?

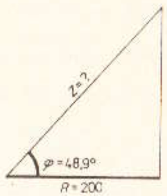
Die Formel

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

wird nach Z umgestellt.

$$Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{200}{0{,}6574}$$

$$Z = 304{,}23$$



b) Gegeben sind: $Z = 198$; $\varphi = 73{,}7°$

Wie lang ist R?

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

$$R = Z \cdot \cos\varphi$$

$$R = 198 \cdot 0{,}2807$$

$$R = 55{,}58$$

7.3.4 Beziehungen zwischen *sin*- und *cos*-Funktion

Funktionswert	*sin*	*cos*
0	0°	90°
0,5	30°	60°
0,707	45°	45°
0,866	60°	30°
1	90°	0°

Aus der nebenstehenden Tabelle wird ersichtlich, daß die Funktionswerte der *sin*- und *cos*-Funktion für bestimmte Winkel gleich sind. Dabei fällt auf, daß die Summe der Winkel mit den gleichen Funktionswerten immer 90° ergibt. Daraus resultieren die folgenden Zusammenhänge:

$$\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$$

$$\sin 45° = \cos(90° - 45°) = \cos 45°$$

$$\sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30°$$

$$\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30°$$

$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45°$$

$$\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30°$$

Aus diesen Beziehungen lassen sich die folgenden allgemeingültigen Regeln ableiten:

$$\boxed{\sin\varphi = \cos(90° - \varphi)} \qquad \boxed{\cos\varphi = \sin(90° - \varphi)}$$

Beispiele:

a) Welchen Winkeln ist der Funktionswert 0,9686 der *sin*- und *cos*-Funktion zugeordnet?

$$\sin\varphi = 0{,}9686 \rightarrow \varphi = 75{,}6°$$

$$\cos\varphi = 0{,}9686 = \sin(90° - 75{,}6°)$$

$$\varphi = 14{,}4°$$

b) Der $\cos 56{,}8° = 0{,}5476$. Welchem Winkel ist dieser Funktionswert der *sin*-Funktion zuzuordnen?

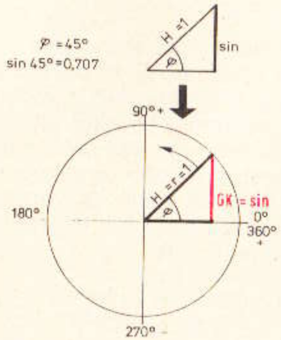
$$\cos 56{,}8° = \sin(90° - 56{,}8°) = \sin 33{,}2°$$

7.3.5 Liniendiagramm der *sin*-Funktion

Um den Wert der *sin*-Funktion für jeden Winkel zu erhalten, soll der Winkel eines Dreiecks kontinuierlich vergrößert werden. Dabei wird ein kleiner Trick angewendet:

Die Hypotenuse erhält die Länge 1. Der Grund ergibt sich aus der Berechnung von $\sin\varphi$:

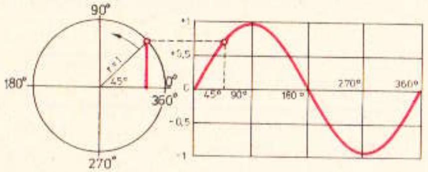
$$\sin\varphi = \frac{GK}{H} = \frac{GK}{1} = GK$$



Ist nämlich in einem Dreieck die Länge der Hypotenuse gleich 1, so entspricht die Länge der Gegenkathete dem Funktionswert des *sin*.

Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Kreis mit dem Radius $r = 1$, dessen Mittelpunkt im Ursprung eines Koordinatensystems liegt.

In diesem Kreis ist das oben dargestellte Dreieck eingetragen. Der Radius *r* entspricht genau der Länge der Hypotenuse des Dreiecks. Dreht sich jetzt die Hypotenuse linksherum, so verändert sich der Winkel und damit auch die Länge der GK, also der Funktionswert des *sin*.



Die nebenstehende Abbildung zeigt das sog. *sin*-Liniendiagramm. Dabei wurde der Umfang des Kreises praktisch in eine Ebene abgerollt und an den entsprechenden Stellen mit den Winkelgraden markiert. Anschließend wird die Höhe der GK, also der Funktionswert des Sinus, auf die rechte Seite für die einzelnen Winkel übertragen. Man erkennt, daß der *sin* von 0° bis 180° positive und von 180° bis 360° negative Funktionswerte hat.

Beachte:

$sin\ 60° = sin\ 120° = 0{,}8660$

$sin\ 225° = sin\ 315° = -0{,}7071$

7.3.6 Tangens-Funktion

Der Tangens (Abkürzung: *tan*) eines Winkels ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete.

Beispiele:

a) Wie groß ist der Winkel φ, wenn $R = 4{,}5$ und $X = 27{,}66$ sind?

$$tan\ \varphi = \frac{GK}{AK} = \frac{X}{R}$$

$$tan\ \varphi = \frac{27{,}66}{4{,}5}$$

$$tan\ \varphi = 6{,}146$$

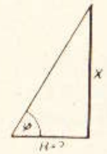
$$\varphi = 80°\ 46' = 80{,}76°$$

b) Wie lang ist die Seite R, wenn $X = 10$ und $\varphi = 60°$ betragen?

$$tan\ \varphi = \frac{X}{R}$$

$$R = \frac{X}{tan\ \varphi} = \frac{10}{1{,}73205}$$

$$R = 5{,}77$$



c) **Vergleich:** Die Steigung einer Funktion wurde als Quotient aus Höhe und Länge definiert. Da auch der *tan* der Quotient aus Höhe (GK) und Länge (AK) ist, kann die Steigung direkt als Winkelgrad angegeben werden.

Steigung einer Straße	Winkel φ
7,5 %	$tan\ \varphi = 0{,}075$ $\varphi = 4{,}29°$
18 %	$tan\ \varphi = 0{,}18$ $\varphi = 10{,}20°$

7.3.7 Cotangens-Funktion

Der Cotangens (Abkürzung: *cot*) eines Winkels ist das Verhältnis der Ankathete zur Gegenkathete.

$$tan = \frac{GK}{AK} \qquad cot = \frac{AK}{GK}$$

$$tan = \frac{1}{cot}$$

$$\text{bzw. } cot = \frac{1}{tan}$$

Der Cotangens ist, wie aus der Gegenüberstellung ersichtlich, nichts anderes als der Kehrwert der *tan*-Funktion. Er wird in der Technik wenig angewendet.

8 Zahlensysteme

8.1 Aufbau von Zahlensystemen

Beim Zehner- oder dekadischen System faßt man immer zu je 10 Einheiten (= Bündeln) zusammen. Mit diesem System, das von den Indern über die Araber zu uns gekommen ist, rechnen wir im täglichen Leben.

Ziffern des Zehnersystems:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

36 = 3 Zehner + 6 Einer

Die Zahl 36 besteht aus drei 10er-Bündeln und 6 Einern. Es werden im Zehnerzahlensystem also 10 Einheiten zu der nächsthöheren zusammengefaßt. Dabei gilt als Vereinbarung, daß die erste Stelle (Einer) rechts und die 2. Stelle (Zehner) links davon steht. Die untenstehende Tabelle zeigt die nächsten Stellen:

Stelle	2.	1.
Name	Zehner	Einer
Wert	3	6

Stelle	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Wert	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1
Name	Million	Hundert-tausender	Zehn-tausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Kurzbe-zeichnung	M	HT	ZT	T	H	Z	E

Ziffern des Dualzahlensystems:

0 und 1

Es ist jedoch sehr schwierig, eine Zahl des Zehnersystems auf elektrischem Wege darzustellen, da zehn verschiedene Potentiale notwendig wären. Um eindeutige Zustände zu erhalten, wurde ein Zahlensystem gewählt, das nur aus zwei Ziffern besteht. Es ist das Dualzahlensystem.

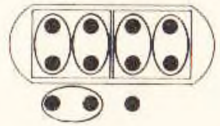
Wertigkeit der Stellen:

Stelle	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Wert	32	16	8	4	2	1

Um eine Dualzahl zu erhalten, wird immer zu je zwei Einheiten gebündelt; d. h., man faßt immer zwei zu der nächsten Einheit zusammen. Aus zwei Einern entsteht ein Zweier-Bündel – aus zwei Zweier-Bündeln ein Vierer-Bündel – aus zwei Vierer-Bündeln ein Achter-Bündel usw.

Beispiele:

a) **Darstellung der Zahl 11:**
Nachdem immer zwei Einheiten zu einem Bündel zusammengefaßt wurden, entsteht das nebenstehende Bild.



Man erhält:

1 8er-Bündel = 8
0 4er-Bündel = 0
1 2er-Bündel = 2
1 Einer = 1

Summe: 11

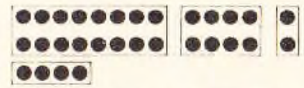
Die nebenstehende Tabelle liefert bereits die Dualzahl für die Zahl 11. Daraus ist ersichtlich, daß nur die Zahlen 1 (ein Bündel) und die Zahlen 0 (kein Bündel) verwendet werden.

Wert	8	4	2	1
Anzahl der Bündel	1	0	1	1
	duale Schreibweise der Dezimalzahl 11			

b) **Darstellung der Zahl 30:**

Beim Bündeln erhält man

1 16er-Bündel = 16
1 8er-Bündel = 8
1 4er-Bündel = 4
1 2er-Bündel = 2
0 Einer = 0



Wert	16	8	4	2	1
Dualzahl	1	1	1	1	0

8.2 Das Dualzahlensystem

Sämtliche Werte ergeben sich im Dualzahlensystem aus den beiden Grundwerten 0 und 1. Mit jeder Stelle nach links steigt der Wert um den Faktor 2. Das Dualzahlensystem wird wegen seiner Einfachheit und damit hohen Zuverlässigkeit in bezug auf mögliche Übertragungsfehler in der elektrischen Datenübertragung und -verarbeitung bevorzugt angewendet.

Die Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen und umgekehrt läßt sich – wie in den folgenden Abschnitten an Beispielen dargestellt wird – ohne weitere mathematische Kenntnisse durchführen.

8.2.1 Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl

Am anschaulichsten ist die bereits beschriebene Darstellung mit Hilfe einer Tabelle, in der man in die obere Zeile die Wertigkeit der Dualzahlen der jeweiligen Zahl des Zehnersystems schreibt und in der darunterliegenden Zeile die entsprechende Dualzahl angibt. Zu bemerken wäre noch, daß das Dualzahlensystem auf Potenzen der Basis zwei beruht.

Beispiel: 71

Potenzen	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Wert	64	32	16	8	4	2	1
Dualzahl	1	0	0	0	1	1	1

$71 = 64 + 4 + 2 + 1$

Beispiele:

a) **Dezimalzahl:** 17

Wert	$\boxed{16}$	8	4	2	$\boxed{1}$
Dualzahl	1	0	0	0	1

(16 + 1 = 17)

b) **Dezimalzahl:** 19

Wert	$\boxed{16}$	8	4	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$
Dualzahl	1	0	0	1	1

(16 + 2 + 1 = 19)

c) **Dezimalzahl:** 119

Wert	$\boxed{64}$	$\boxed{32}$	$\boxed{16}$	8	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$
Dualzahl	1	1	1	0	1	1	1

(64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 119)

d) **Dezimalzahl:** 101

Wert	$\boxed{64}$	$\boxed{32}$	16	8	$\boxed{4}$	2	$\boxed{1}$
Dualzahl	1	1	0	0	1	0	1

(64 + 32 + 4 + 1 = 101)

e) **Dezimalzahl:** 74

Wert	$\boxed{64}$	32	16	$\boxed{8}$	4	$\boxed{2}$	1
Dualzahl	1	0	0	1	0	1	0

(64 + 8 + 2 = 74)

f) **Dezimalzahl:** 386

Wert	$\boxed{256}$	$\boxed{128}$	64	32	16	8	4	$\boxed{2}$	1
Dualzahl	1	1	0	0	0	0	0	1	0

(256 + 128 + 2 = 386)

8.2.2 Umwandlung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl

Beispiel:

Dualzahl	1	1	0	1
Stellenwert	8	4	2	1

Dezimalzahl: 8 + 4 + 0 + 1 = 13

Bei einer gegebenen Dualzahl setzt man für die mit 1 bezeichneten Stellen den entsprechenden Dezimalzahlenwert (Stellenwert). Die Summe der Stellenwerte ergibt die Dezimalzahl.

Beispiele:

a) **Dualzahl:** 1111
Dezimalzahl: 8 + 4 + 2 + 1 = 15

Dualzahl	1	1	1	1
Wert	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

b) **Dualzahl:** 10011
Dezimalzahl: 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19

Dualzahl	1	0	0	1	1
Wert	$\boxed{16}$	8	4	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

c) **Dualzahl:** 101101
Dezimalzahl: 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1
= 45

Dualzahl	1	0	1	1	0	1
Wert	$\boxed{32}$	16	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	2	$\boxed{1}$

d) **Dualzahl:** 1010101
Dezimalzahl: 64 + 0 + 16 + 0 + 4
+ 0 + 1 = 85

Dualzahl	1	0	1	0	1	0	1
Wert	$\boxed{64}$	32	$\boxed{16}$	8	$\boxed{4}$	2	$\boxed{1}$

e) **Dualzahl:** 111111
Dezimalzahl: 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
= 63

Dualzahl	1	1	1	1	1	1
Wert	$\boxed{32}$	$\boxed{16}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

f) **Dualzahl:** 000011
Dezimalzahl: 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1
= 3

Dualzahl	0	0	0	0	1	1
Wert	32	16	8	4	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

Beachte: Die ersten Nullen bleiben unberücksichtigt.

8.2.3 Addition von Dualzahlen

Beim Addieren von Dualzahlen sind folgende Regeln zu beachten:

a) Null plus Null muß wiederum Null ergeben;
b) 0 plus 1 ergibt 1;
c) dasselbe gilt auch für die Umkehrung: 1 plus 0 ergibt 1.
d) Wird 1 plus 1 addiert, so ergibt sich ein Übertrag von 1 (Zweier-Bündel); zwei Einheiten werden zu der nächsthöheren Einheit zusammengefaßt (vgl.: 5 + 5 = 10).
Dabei wird der kleinste Stellenwert 0.

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 10$

Übertrag

Beispiele:

a) Dezimalzahl:	12	Dualzahl:	1100
	+ 14		+ 1110
Übertrag:		Übertrag:	1
	26	Summe:	11010
b) Dezimalzahl:	34	Dualzahl:	100010
	+ 25		+ 11001
Übertrag:		Übertrag:	
	59	Summe:	111011
c) Dezimalzahl:	46	Dualzahl:	101110
	+ 27		+ 11011
Übertrag:	1	Übertrag:	1111
	73	Summe:	1001001

Sachregister