

Grundwissen des Fernmeldedienstes

Band IIb

*Einführung
in die Grundlagen der Elektrotechnik*

Teil IV



Herausgeber: Deutsche Postgewerkschaft, Verlag GmbH.

Frankfurt am Main, Savignystraße 43

Grundwissen des Fernmeldedienstes

Band IIb

Einführung in die Grundlagen der Elektrotechnik

Teil IV

Herausgeber: Deutsche Postgewerkschaft, Verlag GmbH.

Frankfurt am Main, Savignystraße 43

Vorwort

Am Schluß der Bände Ib und IIa ist darauf hingewiesen worden, daß in dem Band IIb das Verhalten von Kapazitäten und Induktivitäten im Wechselstromkreis eingehend behandelt wird. Bei dem heutigen Stand der Fernmeldetechnik können die FB-Handwerker und vor allem die BFt-Kräfte ohne die grundlegendsten Kenntnisse der Wechselstromlehre nicht auskommen; denn überall begegnen uns in der FM-Technik Schein-, Blind- und Wirkwiderstände, überall haben wir es mit Wechselstromleistungen, mit Resonanzfällen usw. zu tun.

Die Aufgabe dieses Bändchens soll es daher sein, mit dem geringsten Aufwand an Mathematik das nicht gerade einfache Gebiet der Wechselstromlehre so zu behandeln, daß es auch von nicht besonders vorgebildeten Kräften in seinen Grundzügen erfaßt werden kann.

Die Gliederung des Bandes IIb ist so gehalten, daß am Anfang die unbedingt zu beherrschenden mathematischen Kenntnisse in breiter Form erläutert werden. Im Anschluß folgt die eigentliche Wechselstromlehre; der Schluß wird durch einige Beispiele der praktischen Anwendung der Wechselstromlehre in der Fernmeldetechnik gebildet.

Möge dieser Band eine ebenso freundliche Aufnahme finden wie seine Vorgänger und den voranstrebenden Kräften ein gutes Hilfswerk sein!

Frankfurt am Main, im Juni 1955

Savignystraße 43

Inhaltsverzeichnis

	Ziffer	Seite
Mathematische Grundlagen		
Winkelmaße und Einheitskreis		
Grad- und Bogenmaß	1	7
Einheitskreis	1	8
Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt	1	8
Die Winkelgeschwindigkeit und die Kreisfrequenz ω	2	9
Der Lehrsatz des Pythagoras	3	12
Bestimmen eines Punktes im Koordinatensystem		
Einteilung des Koordinatensystems	4	15
Ermitteln eines Punktes in einem Quadranten	4	16
Die geometrische Addition	4	16
Winkel in einem Dreieck und ihre Berechnung	5	17
Winkelberechnung im rechtwinkligen Dreieck durch das Verhältnis zweier Seiten	6	18
Der Sinus eines Winkels	7	21
Ermitteln des Sinuswertes im I. Quadranten	7	23
Sinuswerte im II. bis IV. Quadranten	7	25
Der Cosinus eines Winkels	8	26
Der Tangens eines Winkels	9	28
Die Sinuskurve	10	28
Wechselstromlehre		
Der induktive Blind- und Scheinwiderstand	11	30
Das Widerstandsdreieck	11	30
Berechnung des induktiven Blind- und Scheinwiderstandes	11	31
Der kapazitive Blind- und Scheinwiderstand	12	33
Zehnerpotenzen	12	35
Berechnung des kapazitiven Blind- und Scheinwiderstandes	12	36
Die Phasenverschiebung zwischen Wechselstrom und Wechselspannung	13	38
Der Phasenwinkel φ	14	42
seine Abhängigkeit	14	42
sein Einfluß auf die Phasenverschiebung	14	43
Mittel- oder Effektivwerte von Wechselstrom und Wechselspannung	15	44
Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom	16	47
Die Zeigerdarstellung	17	47
Allgemeines	17	47
Sinuskurve durch Zeigerdarstellung	17	48
Darstellung eines Augenblickswertes von Wechselstrom oder Wechselspannung	17	49
Darstellung der Phasenverschiebung und des Phasenwinkels φ	17	49
Die Hintereinanderschaltung von Ohmschem Widerstand mit induktiven oder kapazitiven Blindwiderständen	18	50
Das Spannungsdreieck und seine Entstehung	18	51
Widerstandsdreieck aus Spannungsdreieck	18	53

	Ziffer	Seite
Die Wechselstromleistung	19	53
Wirkleistung	19	54
Blindleistung	19	54
Scheinleistung	19	55
Der Leistungsfaktor $\cos \varphi$	19	55
Zusammenfassung	19	57
Die Zerlegung des Gesamtstromes in Wirk- und Blindstrom	20	58
Das Stromdreieck	20	59
Ableitung der Formeln der Wechselstromleistung	20	59
Die Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand und Kapazität	21	59
Die Reihenschaltung von Ohmschem Widerstand, induktivem und kapazitivem Widerstand	22	61
Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom bei Hintereinanderschaltung von R, L und C	22	63
Die Resonanz (Begriffsbestimmung)	23	66
Die Reihen- (Spannungs-) resonanz	24	67
Die Resonanzkurve bei Reihenresonanz	25	70
Die Thomsonsche Schwingungsformel	26	72
Die Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität	27	73
Die Parallel- (Strom-) resonanz	27	73
Die Resonanzkurve bei Parallelresonanz	27	74
Errechnung der Resonanzspannungen bei Reihenresonanz	28	75
Errechnung des Blindwiderstandes bei Parallelresonanz	28	75
Anwendung der Wechselstromlehre in der FM-Technik		
Die Bedeutung des Luftspaltes bei Drosselspulen der FM-Technik	29	76
Das Verhalten eines Transformators bei Leerlauf und Belastung	30	77
Elektrische Filter und Weichen		
Allgemeines	31	80
Tiefpaßfilter	32	81
Hochpaßfilter	33	82
Drahtfunkteilnehmerweiche	34	82
Bandfilter, Bandsperren	35	83
Siebketten	36	84
Der Dreiphasenwechselstrom		
Entstehung und Bedeutung	37	84
Summe aller Augenblickswerte gleich Null	37	86
Verkettung	37	87
Sternschaltung und Sternspannung	38	87
Dreieckschaltung	39	89
Anhang		
Tabelle der Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte für Winkel zwischen 0° und 90°		

Einführung in die Grundlagen der Elektrotechnik

Teil IV

Wechselstromlehre

(1) Winkelmaße und Einheitskreis (Grad- und Bogenmaß)

Aus der Schule wissen wir, daß man die Größe eines Winkels in Grad (Zeichen: hochgestellte kleine Null) mißt. Ein spitzer Winkel liegt zwischen 0° und 90° , ein rechter Winkel hat 90° , ein stumpfer Winkel liegt zwischen 90° und 180° , ein gestreckter Winkel hat 180° usw. Vergrößern wir den Winkel immer mehr, so gelangen wir schließlich zu einem Vollwinkel, der 360° hat.

Wir wollen jetzt ein anderes Winkelmaß besprechen, das in der Technik sehr viel Verwendung findet: das **Bogenmaß**.

Wenn wir um einen beliebigen Punkt mit einem Zirkel einen geschlossenen Bogen schlagen, so erhalten wir einen Kreis, dessen Umfang sich zu $2\pi \times r$ errechnet. π ist eine Konstante mit dem angenäherten Wert von 3,14 und r der Radius (der Halbmesser) des Kreises (vgl. Band Ia, Ziffer 9, Kreisfläche). Wie oben gesagt, gehört zu einem Winkel von 360° ein Bogen von der Länge $2\pi \times r$. Der Umfang dieses Kreises, d. h. die Länge des Bogens über einem Winkel von 360° , ist also neben der Größe $2\pi = 6,28$ auch abhängig von der Länge des Radius r . So beträgt z. B. der Umfang eines Kreises von $r = 1 \text{ cm} = 2\pi \times r = 2 \times 3,14 \times 1 = 6,28 \text{ cm}$, der Umfang eines Kreises mit einem Radius $r = 2 \text{ cm} = 2\pi \times r = 2 \times 3,14 \times 2 = 6,28 \times 2 = 12,56 \text{ cm}$, der Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 3,5 \text{ cm} = 6,28 \times 3,5 = 21,98 \text{ cm}$.

Aus diesen Berechnungen erschen wir, daß die Zahlenwerte sich jeweils auf den **Umfang** eines Kreises, also auf den Bogen b , der einen Winkel von 360° einschließt, beziehen. Wir gelangen weiter zu der Erkenntnis, daß wir nicht nur die Größe eines Winkels von 360° , sondern auch die Größe eines jeden Winkels zwischen 0° und 360° durch die Länge seines zugehörigen Bogens b bestimmen können. Die Bogenlängen dieser Winkel müssen bei gleichem Radius selbstverständlich einen kleineren Wert als der Bogen über einem Winkel von 360° haben. Das Verhältnis des zu einem Winkel gehörenden Bogens b zu seinem Radius r ist aber stets eine Konstante. Man nennt sie das **Bogenmaß** eines Winkels.

$$\frac{b}{r} = \text{const}$$

Beispiele:

$$b = 12,56, \quad r = 4 \quad \frac{b}{r} = \frac{12,56}{4} = 3,14$$

$$b = 6,28, \quad r = 2 \quad \frac{b}{r} = \frac{6,28}{2} = 3,14$$

$$b = 3,14, \quad r = 1 \quad \frac{b}{r} = \frac{3,14}{1} = 3,14$$

Für die Feststellung des Bogenmaßes eines Winkels ist es also völlig gleichgültig, ob der Radius r die Größe 1, 2, 3 usw. hat, weil mit größerem Radius auch der Bogen im gleichen Verhältnis größer wird. Das Verhältnis $b:r$ hat für eine bestimmte Winkelgröße stets den **gleichen** Zahlenwert. Man hat deshalb festgelegt, daß der Radius eines Kreises einfach den Wert 1 hat, weil damit das Teilen der Bogenlänge durch den Radius wegfällt. Bei $r = 1$ ist der zu dem Vollwinkel (360°) gehörende Bogen immer gleich 6,28 oder (bei kleineren Winkeln als 360°) ein Bruchteil dieser Zahl. Es ist auch gleichgültig, welches Längenmaß wir einsetzen, d. h. ob 1 mm, 1 cm, 1 m usw. oder überhaupt kein Längenmaß, weil sich die Maße wegekürzen,

z. B. $b = 12,56 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$, $\frac{b}{r} = \frac{12,56 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 3,14$. Der Umfang eines Kreises und damit das Bogenmaß eines Winkels von 360° ist dann stets $2\pi \times 1 = 6,28$.

Ein Kreis, dessen Radius den Wert 1 hat, nennt man **Einheitskreis**.

Zusammenfassung:

Unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht man das Verhältnis des zu diesem Winkel gehörenden Bogens b zu dessen Radius r .

$$\text{Bogenmaß} = \frac{b}{r}$$

Im Einheitskreis ist $r = 1$, das Bogenmaß daher

$$\frac{b}{1} = b$$

Am Anfang hatten wir festgestellt, daß das Bogenmaß eines Winkels von 360° gleich $2\pi = 6,28$ beträgt. Ein gestreckter Winkel (180°) hat demnach das Bogenmaß von $\frac{2\pi}{2} = \pi = 3,14$ und ein rechter Winkel (90°) $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1,57$. Wir können nun

den Schluß ziehen, daß das Bogenmaß eines Winkels von 1° gleich dem 360. Teil von 2π ist und $6,28 : 360 = \text{rund } 0,0174$ beträgt.

Wir wollen uns jetzt überlegen, wie groß der Winkel, in Winkelgraden ausgedrückt, sein muß, wenn die Bogenlänge gleich 1 ist. Wir stellen hierzu einen einfachen Dreisatz auf:

$$\begin{array}{ccc} 6,28 & \text{---} & 360^\circ \\ 1 & \text{---} & ?^\circ \end{array}$$

Lösung: $360 : 6,28 = 57,3^\circ$.

Es entspricht der Bogenlänge 1 ein Winkel von $57,3^\circ$.

Wir haben somit die einfachste Form gefunden, sowohl einen in **Grad** angegebenen Winkel ins **Bogenmaß** zu übertragen als auch einen im **Bogenmaß** angegebenen Winkel in **Winkelgraden** auszudrücken.

Wir wollen den jeweils zu betrachtenden Winkel mit α (Alpha, griechischer Buchstabe) bezeichnen. Diesen Winkel, in Graden ausgedrückt, kennzeichnen wir dadurch, daß wir ihn mit der kleinen hochgestellten Null, also α° , versehen. Drücken wir α im Bogenmaß aus, so erhält er an Stelle des Gradzeichens einen kleinen Bogen ($\hat{\alpha}$). In dem ersten Falle sagt man Alpha Grad (α°) und im zweiten Falle Alpha Bogen ($\hat{\alpha}$). Es ist:

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= \text{Bogen} \times 57,3 \\ \hat{\alpha} &= \frac{\text{Grad}}{57,3} \end{aligned}$$

Beispiele:

a) Wie groß ist das Bogenmaß bei einem Winkel von 27° ?

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{Grad}}{57,3} = \frac{27}{57,3} = 0,47$$

b) Wie groß ist ein Winkel im Gradmaß, wenn der ihm zugehörige Bogen 1,832 beträgt?

$$\alpha^\circ = \text{Bogen} \times 57,3 = 1,832 \times 57,3 = \text{rund } 105^\circ.$$

Aus unseren Überlegungen können wir folgern, daß der Bogenwert eines Winkels kleiner sein muß als der Gradwert und umgekehrt. Wenn wir uns lediglich die Zahl 57,3 merken, so ergeben sich die obigen Formeln als Selbstverständlichkeit; denn der Zahlenwert des Bogenmaßes muß immer kleiner als der des Gradmaßes

sein ($\hat{\alpha} = \frac{\alpha^\circ}{57,3}$) und der Zahlenwert des Gradmaßes immer größer als der des Bogenmaßes ($\alpha^\circ = \hat{\alpha} \times 57,3$).

(2) Die Winkelgeschwindigkeit ω^* und die Kreisfrequenz

Unter der Winkelgeschwindigkeit ω versteht man den in der Zeit 1 sec überstrichenen Winkel im Bogenmaß. ω ist $= 6,28 \times \frac{1}{T} = \frac{6,28}{T}$, wobei T die Zeit für **einen**

Umlauf bedeutet. Beträgt z. B. die Zeit **eines** Umlaufes $\frac{1}{50}$ sec, so beträgt $\omega = \frac{6,28}{\frac{1}{50}} = 6,28 \times 50 = 314$. ω ist also eine kennzeichnende Größe für sich wieder-

holende umlaufende Vorgänge.

Zur Erläuterung betrachten wir Abb. 1.

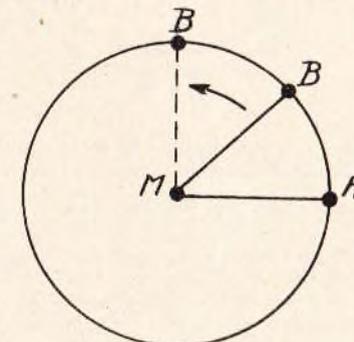


Abb. 1

*) Anm.: Omega, kleines griechisches o. Im Gegensatz hierzu Ω , das große griechische O (Symbol für den elektrischen Widerstand R).

M bedeutet den Mittelpunkt des Einheitskreises, die Strecke MA den unverrückbar in dieser Lage verharrenden ersten Schenkel eines Winkels, dessen zweiter Schenkel MB sich um den Mittelpunkt M des Kreises nach links, also im Gegensinne des Uhrzeigers, drehen läßt. Steht dieser Schenkel nach Ablauf einer Sekunde senkrecht auf MA, so hat er während dieser Zeit einen Winkel von 90° oder, im Bogenmaß

ausgedrückt, $\frac{\pi}{2}$ bestrichen (Winkel AMB, Abb. 1).

Hat der Schenkel MB von seinem Ausgangspunkt A in 1 sec diesen Punkt wieder erreicht, so hat er einen Winkel von 360° oder 2π bestrichen. Die Winkelgeschwindigkeit ω beträgt im ersten Falle $\frac{\pi}{2} : 1 = 3,14$, im zweiten Falle $2\pi : 1 = 6,28$.

$\omega = 2\pi$ bedeutet also, daß der bewegliche Schenkel MB sich in **1 sec** um $360^\circ = 2\pi$ gedreht, also in 1 sec **eine** Umdrehung vollführt hat.

Wir betrachten jetzt das Schwungrad einer Maschine, auf dessen Radkranz wir gem. Abb. 2 einen dicken Punkt P mit Kreide gemacht haben. Die Maschine setzen wir langsam im Gegensinne des Uhrzeigers in Gang und betrachten unseren Kreidepunkt P, der sich selbstverständlich in der gleichen Richtung wie das Rad dreht. Hat der Punkt P nach 1 sec seinen Ausgangspunkt, der in Abb. 2 durch eine strichpunktierte Linie dargestellt ist, wieder erreicht, so hat er – und damit das Rad – **eine Umdrehung pro Sekunde** gemacht. Die Winkelgeschwindigkeit ω beträgt hier auch $\omega = 2\pi$.

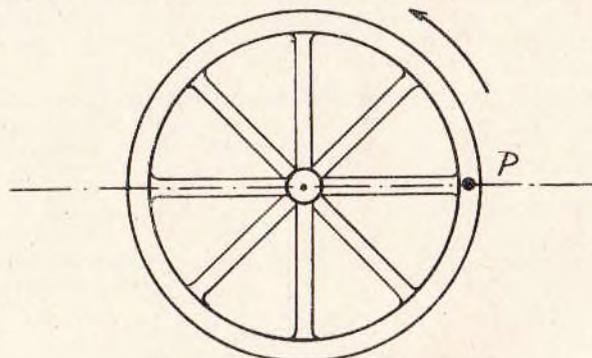


Abb. 2

Nun kommt es aber in der Technik kaum vor, daß eine Maschine nur **eine** Umdrehung pro sec macht; sie wird vielmehr schneller laufen. Bei Maschinen arbeiten die Techniker mit Umdrehungen pro Minute ($\frac{U}{\text{min}}$). Macht die Maschine z. B.

$3000 \frac{U}{\text{min}}$, so ergibt sich eine Umdrehungszahl von 50 pro sec ($3000 : 60$). Unser

Punkt P hat also 50mal in 1 sec einen Winkel von 360° beschrieben; die Winkelgeschwindigkeit beträgt demnach $\omega = 2\pi \times 50$.

Wenden wir uns der Abb. 3 zu. Wir erkennen den Nord- und Südpol eines Magneten, der wie beim Kurbelinduktor (Band III, Abschn. V) mit Polschuhen ausgerüstet ist. Zwischen diesen beiden Polschuhen herrscht ein Kraftfluß bestimmter Stärke, dessen Richtung durch Pfeile angedeutet ist. In dem Raum zwischen dem Nord- und Südpol ist eine Leiterschleife drehbar um den Punkt M angebracht. Die Flä-

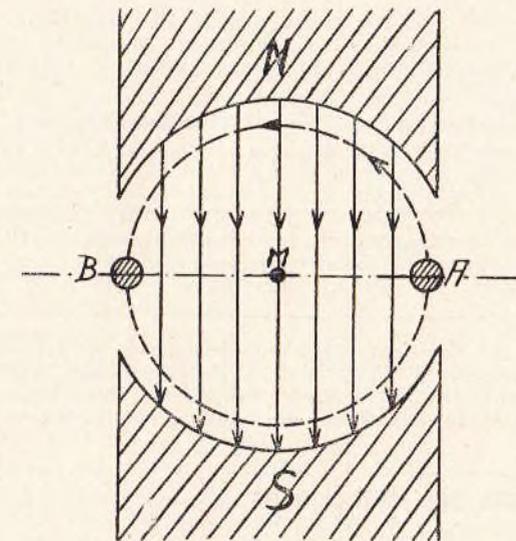


Abb. 3

chen A und B stellen die Querschnitte der Leiterschleife dar. Die räumliche Anordnung ist aus Abb. 4 zu ersehen. Wird die Leiterschleife gedreht, so entsteht in ihr nach den Induktionsgesetzen eine EMK, die in einem geschlossenen Stromkreis einen Wechselstrom zur Folge hat. Da diese Vorgänge im Band IIa ausführlich behandelt worden sind, soll hier nicht näher auf sie eingegangen werden. Wichtig ist die Betrachtung des Punktes A der Leiterschleife, den wir mit dem Punkt P in Abb. 2 vergleichen können. Dreht sich der Querschnitt der Leiterschleife 50mal in 1 sec, so beschreibt Punkt A genau wie Punkt P 50mal in 1 sec einen Kreis.

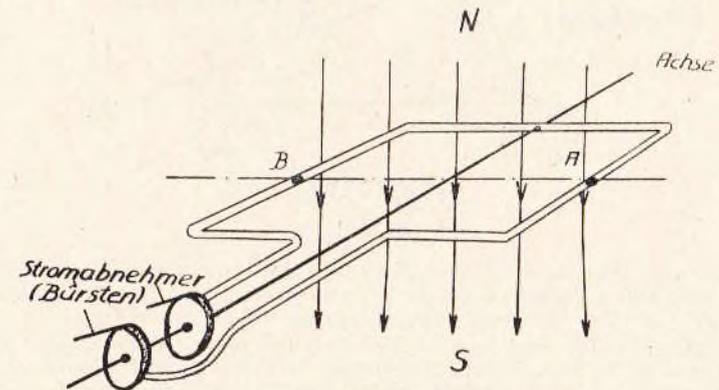


Abb. 4

ω beträgt auch hier $2\pi \times 50$. Da in diesem Falle eine 50malige Umdrehung der Leiterschleife einer Frequenz f von 50 Hz entspricht, so können wir an Stelle der **Umdrehungszahl** pro Sekunde die **Frequenz** f setzen. Es wäre also in unserem Beispiel $\omega = 2\pi f = 6,28 \times 50 = 314$.

Man bezeichnet das Produkt $\omega = 2\pi \times f$ als Kreisfrequenz.

Würde sich die Leiterschleife 800mal in 1 sec drehen, so beträgt $\omega = 2\pi \times f = 6,28 \times 800 = \text{rund } 5000$.

Die Kreisfrequenz ω ist das Produkt aus $2\pi = 6,28$ mal der Frequenz f in Hertz.

$$\omega = 2\pi f$$

Welche Bedeutung die Kreisfrequenz ω hat, werden wir bei der Besprechung von induktiven und kapazitiven Blind- und Scheinwiderständen feststellen. Vorerst müssen wir uns aber noch mit einigen mathematischen Begriffen beschäftigen, die wir für das Verständnis der eigentlichen Wechselstromlehre benötigen.

(3) Der Lehrsatz des Pythagoras

Etwa im Jahre 550 vor Christi Geburt stellte ein griechischer Mathematiker und Philosoph namens Pythagoras einen nach ihm benannten weltbekannten Lehrsatz auf, der in der Mathematik und Technik auch heute noch von grundlegender Bedeutung ist. Wir wollen zum Verständnis dieses Lehrsatzes ein rechtwinkliges Dreieck betrachten und unsere Schulkenntnisse insofern wieder auffrischen, als wir uns die Bezeichnung der Winkel in einem Dreieck, die Bezeichnung der Seiten eines Dreiecks und insbesondere die Bezeichnung der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ins Gedächtnis zurückrufen.

Die Eckpunkte eines Dreiecks bezeichnet man mit den Buchstaben A, B und C (Abb. 5).

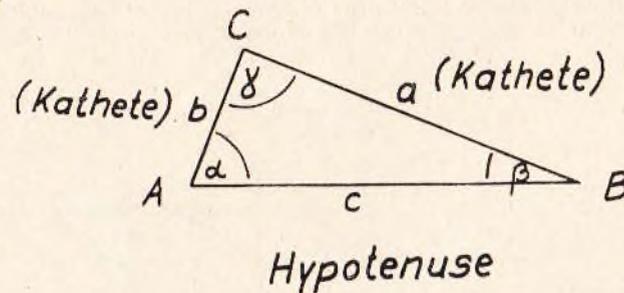


Abb. 5

Die Seiten eines Dreiecks erhalten die Buchstaben a, b und c, wobei zu merken ist, daß die Seite a dem Punkt A (in Abb. 5 die Strecke BC), die Seite b dem Punkt B (Strecke AC) und die Seite c dem Punkt C (Strecke AB) gegenüberliegt.

Die Winkel in einem Dreieck erhalten die Bezeichnungen α (Alpha, kleiner griechischer Buchstabe), β (Beta, kleiner griechischer Buchstabe) und γ (Gamma, kleiner griechischer Buchstabe). Der Winkel α wird gebildet durch die Seiten b und c des Dreiecks, der Winkel β durch die Seiten a und c, der Winkel γ durch die Seiten a

und b. Der Scheitelpunkt des Winkels α ist der Punkt A, der des Winkels β der Punkt B und der des Winkels γ der Punkt C.

Alle diese Bezeichnungen gelten für **jedes** Dreieck, gleich ob es spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist. Beim rechtwinkligen Dreieck, mit dem wir es in Zukunft zu tun haben werden, treten noch andere Bezeichnungen hinzu, die wir uns unbedingt merken müssen.

Wir wollen bei unseren Betrachtungen stets annehmen, daß der rechte Winkel der Winkel γ ist, d. h. der Winkel, dessen Scheitelpunkt der Punkt C bildet. Zu diesem Winkel gehören (s. o.) die Seiten a und b, die die Bezeichnung **Katheten** tragen. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, also die Seite c, heißt beim rechtwinkligen Dreieck die **Hypotenuse**. Die Seite BC = a wäre demnach die eine Kathete, die Seite AC = b die andere Kathete und die Seite AB = c die Hypotenuse unseres rechtwinkligen Dreiecks Abb. 5.

Pythagoras hat nun folgenden Lehrsatz aufgestellt:

Die Summe der Flächen der beiden Kathetenquadrate in einem rechtwinkligen Dreieck ist gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates.

Die Fläche eines Rechtecks errechnet sich aus dem Produkt der beiden Seiten a und b: $F = a \times b$. Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleichen Seitenlängen. Der Flächeninhalt errechnet sich daher gleichfalls aus dem Produkt beider Seiten. Die Fläche eines Quadrates mit der Seite a ist gleich $a \times a = a^2$. Bezeichnen wir eine Seite mit b, dann ist die Fläche des Quadrates $b \times b = b^2$ und bei einer Seite c $c \times c = c^2$. Der Lehrsatz des Pythagoras erhält somit zeichnerisch die Form gemäß Abb. 6.

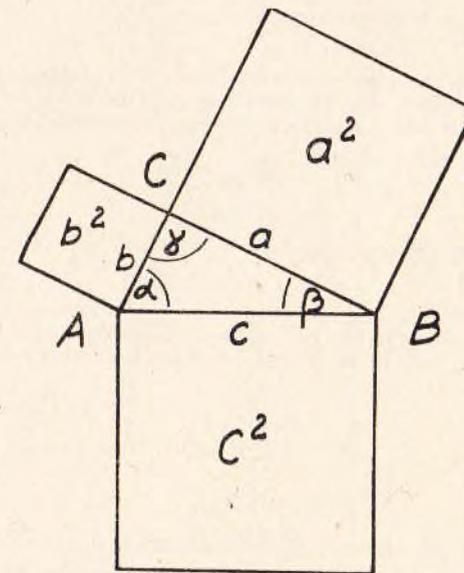


Abb. 6

In Buchstaben ausgedrückt, lautet er:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

demnach ist

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ und} \\ b^2 = c^2 - a^2$$

Im weiteren Verlauf unserer Ausführungen werden wir erkennen, daß uns die Quadratwerte nicht viel nützen. Wir müssen vielmehr aus dem Inhalt eines Quadrates die Länge seiner Seite ermitteln. Dieses geschieht durch das sogenannte „Quadratwurzelziehen“. An Hand von einfachen Zahlen wollen wir uns mit dem Wesen der Quadratwurzeln vertraut machen. Auf die Rechentechnik kann hier jedoch nicht näher eingegangen werden. Hierüber wäre in dem Band „Rechenlehre“, der von der DPG herausgegeben worden ist, der Abschnitt VI nachzulesen.

Wir nehmen an, die Seite a eines Quadrates betrage 4 cm. Es ist dann sein Flächeninhalt $a^2 = a \times a = 4 \times 4 = 16$ qcm oder 16 cm^2 , wie man besser schreibt. Ist uns nun der Flächeninhalt $a^2 = 16 \text{ cm}^2$ gegeben, und uns ist die Aufgabe gestellt, die Größe der Seite a dieses Quadrates zu suchen, so schreibt man „Quadratwurzel aus a^2 “ gleich „Quadratwurzel aus $16 = 4$ “.

Im täglichen Leben läßt man im allgemeinen das Wort **Quadratwurzel** weg und spricht nur von „Wurzel aus 16 “. Das mathematische Kurzzeichen für den Rechenbefehl „Wurzelziehen“ ist $\sqrt{\quad}$. Demzufolge erhält die Aufgabe „Quadratwurzel aus 16 “ folgende Form:

$$\sqrt{16} = \sqrt{4 \times 4} = 4$$

oder in allgemeinen Zahlen

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = a \\ \text{bzw. } \sqrt{b^2} = \sqrt{b \times b} = b \text{ usw.}$$

Nun zurück zu unserem Pythagoreischen Lehrsatz

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Wir wollen nun wissen, wie groß die Seite c eines rechtwinkligen Dreiecks ist, wenn die Seiten a und b gegeben sind. Hierzu müssen wir die Werte für $a^2 = a \times a$ und $b^2 = b \times b$ zusammenzählen und aus dieser Summe die Wurzel ziehen.

Die Gleichung erhält damit folgende Form:

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wir dürfen auf keinen Fall schreiben

$$c = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2},$$

denn so würde $c = a + b$ sein, was offensichtlich nicht stimmt. Ein Rechenbeispiel mag dies veranschaulichen. Die Seite a eines rechtwinkligen Dreiecks möge die Länge von 3 cm, die Seite b eine Länge von 4 cm haben. Wie lang ist die Seite c?

Es ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 \\ c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ cm}^2$$

c ist demnach gleich

$$\sqrt{25 \text{ cm}^2} = 5 \text{ cm}$$

Würden wir nicht die Summe der Quadrate von a und b errechnen und aus dieser Summe die Wurzel ziehen, sondern von jedem Quadrat einzeln ($c = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$), so würde die Rechnung wie folgt ausschen und demnach falsch sein:

$$c = \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4 = 7$$

Wir sehen hieraus, daß wir uns folgendes merken müssen:

Ist aus einer Summe von Quadratzahlen die Wurzel zu ziehen, so sind die Zahlenwerte der Quadratzahlen erst zusammenzuzählen. Dann erst darf aus dieser Summe die Wurzel gezogen werden.

(4) Bestimmen eines Punktes P im Koordinatensystem. Errechnen des Zahlenwertes der aus der geometrischen Summe von $x + y$ gebildeten Strecke

Der Lehrsatz des Pythagoras hat für uns eine besondere Bedeutung, wie wir im weiteren Verlaufe sehen werden. Nur mit seiner Hilfe sind wir in der Lage, die sogenannte „geometrische Addition“ im Gegensatz zur „algebraischen Addition“, die ein einfaches Zusammenzählen ist (z. B. $3 + 5 = 8$, $a + b = c$ usw.), durchzuführen.

Es seien uns zwei Werte, $x = 4$ und $y = 5$ gegeben, die geometrisch zu addieren sind. Hierzu bedienen wir uns des bekannten Achsenkreuzes, das man auch „Koordinatensystem“ nennt. Dieses System wird durch die x- und y-Achse in vier sogenannte „Quadranten“ geteilt, die die Bezeichnung I, II, III und IV haben. Ihre Anordnung zeigt Abb. 7.

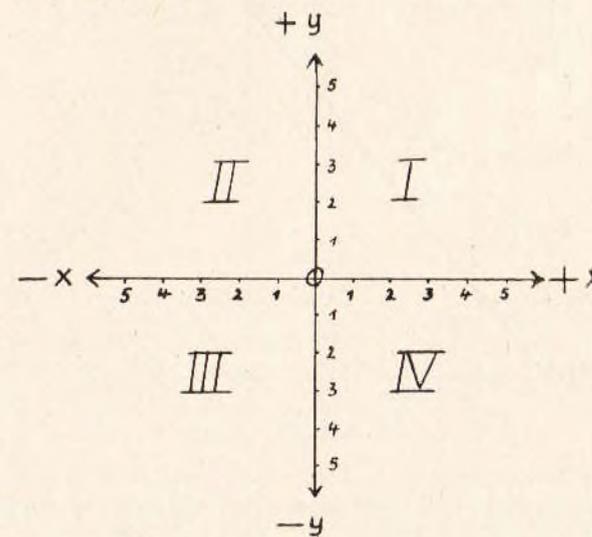


Abb. 7

Jeder Punkt in der Fläche eines Quadranten kann dadurch bestimmt werden, daß man auf der x-Achse in dem gegebenen Punkt, der einem Zahlenwert entspricht

(z. B. $x = 4$), eine Parallele zur y -Achse zieht. Ebenso verfährt man bei einem Zahlenwert auf der y -Achse (z. B. $y = 5$). Der Schnittpunkt dieser Linien ergibt den gesuchten Punkt. Verbinden wir ihn mit dem Schnittpunkt des Achsenkreuzes, welcher der Nullpunkt des Koordinatensystems ist, dann entspricht diese Strecke dem Zahlenwert der geometrischen Addition der x - und y -Werte. Im ersten Quadranten haben x und y positive Werte, im zweiten Quadranten hat x einen negativen, y einen positiven Wert, im dritten Quadranten haben x und y negative Werte und im vierten Quadranten hat y einen negativen, x einen positiven Wert. Wir wollen uns im folgenden in der Hauptsache nur mit den Quadranten I und IV beschäftigen.

Beispiel 1:

Gegeben sei $x = +4$, $y = +5$. In welchem Quadranten liegt der gesuchte Punkt P, und welchen Zahlenwert hat die Strecke vom Nullpunkt bis P?

Lösung:

x und y haben positive Werte. Der gesuchte Punkt liegt daher im Quadranten I. Wir zeichnen die x - und y -Achse des I. Quadranten, tragen auf der x -Achse 4 gleiche Teile, z. B. je 1 cm ab, und auf der y -Achse 5 gleiche Teile zu je 1 cm (Abb. 8). Jetzt ziehen wir, von $x = 4$ ausgehend, die Parallele zur y -Achse und von $y = 5$ ausgehend, die Parallele zur x -Achse (in Abb. 8 gestrichelt dargestellt). Der Schnittpunkt dieser Parallelen ergibt den gesuchten Punkt P. Wir haben somit die beiden

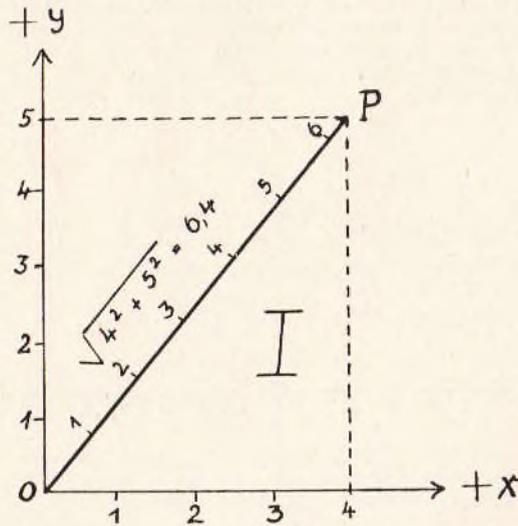


Abb. 8

Achsen x und y entsprechend ihren Zahlenwerten zu einem Rechteck ergänzt. Die Verbindungslinie OP ist eine Diagonale des Rechtecks, die es in zwei deckungsgleiche (kongruente) rechtwinklige Dreiecke teilt. Die Strecke von $x = 4$ bis zum Punkt P ist daher gleich der Strecke 0 bis 5 auf der y -Achse. Es ist der Zahlenwert der Diagonalen als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} = \text{rund } 6,4$. Tragen wir auf der Diagonalen das Längenmaß 1 cm gleich dem Zahlenwert 1 ab, so messen wir die

Strecke OP zu 6,4 cm. Wir erkennen hieraus, daß eine rechnerische Bestimmung des Zahlenwertes fortfallen kann, wenn es nicht auf hohe Genauigkeit ankommt. Selbstverständlich können für die Zahlenwerte auch andere Längenwerte eingesetzt werden, z. B. für den Zahlenwert 100 0,5 cm usw.

Beispiel 2:

Gegeben sei $x = +5$, $y = -3$. In welchem Quadranten liegt der gesuchte Punkt P, und welchen Zahlenwert hat die Strecke OP ?

Lösung:

Da x einen positiven, y aber einen negativen Zahlenwert hat, liegt der gesuchte Punkt P im IV. Quadranten. Das Bestimmen des Punktes P und das Errechnen des Zahlenwertes der Strecke OP geschieht in der gleichen Weise wie im Beispiel 1. Abb. 9 zeigt die Darstellung.

$$OP = \sqrt{(-3)^2 + 5^2}$$

Da Minus \times Minus Plus ergibt, erhalten wir positive Quadratzahlen unter dem Wurzelzeichen:

$$OP = \sqrt{(-3 \times -3) + (5 \times 5)} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5,83.$$

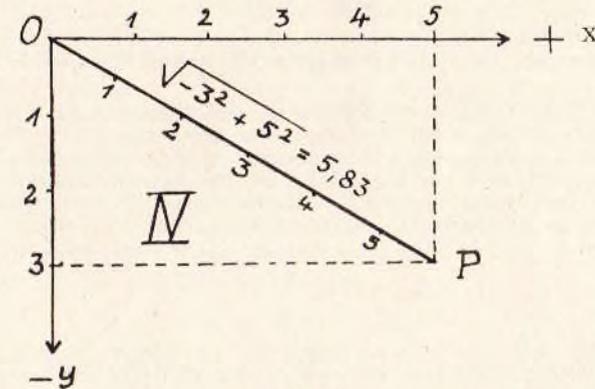


Abb. 9

Wie wir später sehen werden, haben wir es in der Wechselstromlehre sehr häufig mit sogenannten „Blindanteilen“, z. B. Blindwiderstand, Blindleistung, zu tun, ferner mit „Wirkanteilen“, z. B. Wirkwiderstand, Wirkleistung. Aus mathematischen Gründen, auf die hier nicht eingegangen werden soll, werden die Wirkanteile auf der x -Achse, die Blindanteile auf der y -Achse abgetragen. Der Zahlenwert der Strecke OP ist dann die geometrische Summe der beiden Anteile und erhält meist die Vorsilbe „Schein-“, z. B. Scheinwiderstand, Scheinleistung.

(5) Winkel in einem Dreieck und ihre Berechnung

Schon einige Jahrhunderte vor Christi Geburt war bekannt, daß die Winkelsumme in einem Dreieck gleich 2 rechte Winkel, oder im Gradmaß ausgedrückt, 180° beträgt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Sind von den drei Winkeln eines Dreiecks zwei bekannt, z. B. α und β , so läßt sich der dritte Winkel, hier also γ , ohne Schwierigkeiten berechnen. Es ist:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Demzufolge errechnet sich β zu:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \text{ und}$$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

Wir merken uns:

Sind in einem Dreieck zwei Winkel der Größe nach bekannt, so errechnet sich der dritte Winkel dadurch, daß man die Summe der beiden bekannten Winkel von 180° abzieht.

Beispiel:

Wie groß ist der Winkel β eines Dreiecks, wenn $\alpha = 65^\circ$ und $\gamma = 42^\circ$ betragen?

Lösung:

$$\alpha + \gamma = 65^\circ + 42^\circ = 107^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$$

Der Lehrsatz, daß die Winkelsumme in einem Dreieck stets 180° beträgt, gilt für alle Dreiecksformen, gleich ob sie spitzwinklig, stumpfwinklig oder rechtwinklig sind.

Beim rechtwinkligen Dreieck vereinfacht sich die Rechnung dadurch, daß man nur den Wert **eines** Winkels in die Rechnung einzusetzen braucht. Wir hatten (siehe Ziffer 3 und Abb. 5) als feststehend angenommen, daß der Winkel γ in einem rechtwinkligen Dreieck stets der rechte Winkel ist. Ist also der Winkel α bekannt, so errechnen wir den Winkel β nach der obigen Formel und setzen an Stelle des Buchstabens γ seinen Winkelwert, also 90° ein. Es ist dann:

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Demzufolge ist

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

In den nächsten Ziffern werden wir sehen, daß es noch eine andere Möglichkeit gibt, die Größe eines Winkels zu bestimmen, nämlich durch das Verhältnis zweier Seiten eines Dreiecks.

(6) Berechnen der Größe eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck durch das Verhältnis zweier Dreieckseiten

In Ziffer 5 behandelten wir die Berechnung eines Winkels in einem Dreieck mit Hilfe der Winkelsumme. Hier wollen wir die Berechnung der Größe eines Winkels aus dem **Verhältnis zweier Seiten** eines rechtwinkligen Dreiecks besprechen.

Zur Einführung in das mathematische Gebiet der sogenannten „Winkelfunktionen“ wollen wir uns einige rechtwinklige Dreiecke ansehen und uns das in Ziffer 3 Gebrachte ins Gedächtnis zurückrufen.

Wir hatten festgestellt, daß man die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die dem rechten Winkel **gegenüber** liegt, mit „Hypotenuse“ und die dem rechten Winkel **anliegenden** Seiten mit „Katheten“ bezeichnet. Wir wollen hier die Katheten noch genauer benennen und betrachten hierzu das rechtwinklige Dreieck Abb. 10.

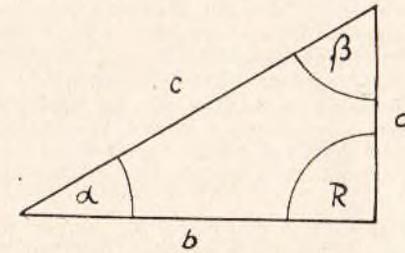


Abb. 10

Die Seite a ist bekanntlich die Seite, die dem Winkel α , die Seite b die Seite, die dem Winkel β und die Seite c die Seite, die dem rechten Winkel R gegenüberliegt. Die Seiten a und b sind die **Katheten**, die Seite c ist die **Hypotenuse** unseres rechtwinkligen Dreiecks.

Wir wollen jetzt die Katheten a und b in bezug auf ihre **Lage** zu den Winkeln α und β betrachten.

Der Winkel α wird gebildet aus der Kathete b und der Hypotenuse c. Die Kathete a liegt diesem Winkel gegenüber. Da die Kathete b auf der einen Seite den Winkel α begrenzt, d. h. **an** ihm liegt, nennen wir sie „**Ankathete**“ und die dem Winkel α **gegenüber** liegende Kathete a die „**Gegenkathete**“.

Bei dem Winkel β liegen die Verhältnisse umgekehrt. Hier ist die Kathete a die **Ankathete**, die Kathete b die **Gegenkathete**. Die Hypotenuse c haben beide Winkel gemeinsam. Wir wollen im Verlauf unserer Ausführungen in erster Linie den Winkel α betrachten, der später eine andere Bezeichnung, nämlich φ (Phi, kleiner griechischer Buchstabe; nicht zu verwechseln mit Φ , dem großen griechischen Buchstaben Phi), als Formelzeichen für den Kraftfluß (vgl. Bd. IIa) erhalten wird. Die Größe dieses Winkels α ist offensichtlich abhängig von dem Längenverhältnis einer der beiden **Katheten** zur **Hypotenuse** oder der Katheten untereinander.

Wir betrachten hierzu vorerst die Abb. 11a–c.

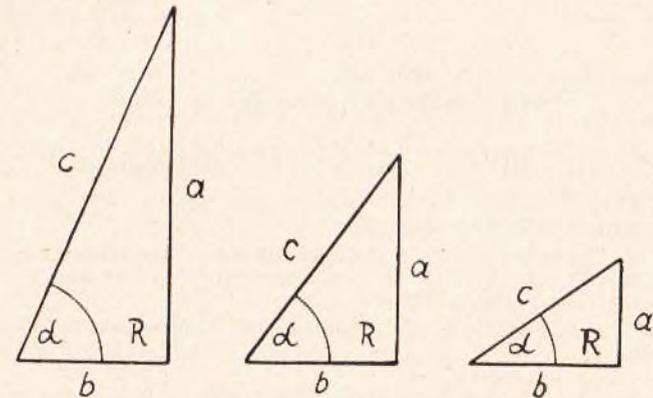


Abb. 11a

Abb. 11b

Abb. 11c

Ankathete b hat stets gleiche Länge

Die Ankathete b hat in allen 3 Fällen die **gleiche** Länge. Ist die Gegenkathete a lang, so ist der Winkel α groß, ist a klein, so ist auch der Winkel α klein. Die Länge der Strecke c ist auch unterschiedlich. Wir erkennen, daß die Länge der Strecke c in ganz besonderem Maße die Größe des Winkels α beeinflußt.

Wird die Seite a immer länger, so wird auch c bei **gleichbleibender** Strecke b immer länger, der Winkel α damit immer größer. Wir können also sagen, daß das Verhältnis der Seite a , also der Gegenkathete, zur Seite c , also der Hypotenuse, die Größe des Winkels α bestimmt. Wir werden in der nächsten Ziffer näher darauf eingehen.

Jetzt wollen wir den umgekehrten Fall betrachten und die Frage stellen, wie sich die Größe des Winkels α verhält, wenn wir die Länge der Gegenkathete a **unverändert** lassen und die Ankathete b in ihrer Länge verändern. Aus den Abb. 12a-c

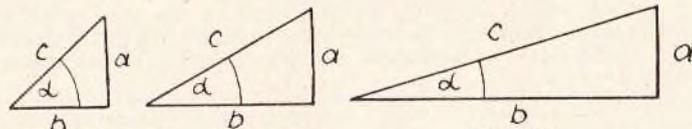


Abb. 12a

Abb. 12b

Abb. 12c

Gegenkathete a hat stets gleiche Länge

geht hervor, daß mit **länger** werdender Ankathete die Größe des Winkels α **kleiner** wird. Wir haben hier also die Umkehrung des zuerst behandelten Falles.

Im dritten Falle wollen wir die **Hypotenuse** unverändert lassen und feststellen, von welchen Strecken die Größe des Winkels α jetzt bestimmt wird (Abb. 13a-c).

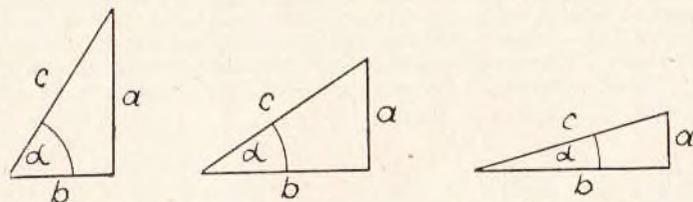


Abb. 13a

Abb. 13b

Abb. 13c

Hypotenuse c hat stets gleiche Länge

Auch hier stellen wir fest, daß die Größe des Winkels α durch die Länge der Gegenkathete a bestimmt wird. Ferner erschen wir, daß die Ankathete b bei größer werdendem Winkel α kleiner wird.

Zusammenfassend können wir also sagen:

- Wird die **Gegenkathete** bei **gleichbleibender Ankathete** vergrößert, so **vergrößert** sich der Winkel, der der Gegenkathete gegenüberliegt. Die Länge der Hypotenuse vergrößert sich gleichfalls.
- Wird die **Ankathete** bei **gleichbleibender Gegenkathete** vergrößert, so **verkleinert** sich der Winkel, der der Gegenkathete gegenüberliegt. Die Länge der Hypotenuse vergrößert sich.
- Wird die **Gegenkathete** bei **gleichbleibender Hypotenuse** vergrößert, so **vergrößert** sich der Winkel, der der Gegenkathete gegenüberliegt. Die Länge der Ankathete verringert sich.

Folgerung:

Das Verhältnis zweier Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmt die Größe eines der beiden Winkel, die dem rechten Winkel anliegen.

(7) Der Sinus (sin) eines Winkels

Nach den allgemeinen Ausführungen in Ziffer 6 wird es uns nicht schwerfallen, den mathematischen Begriff des Sinus eines Winkels zu verstehen.

Unter dem Sinus (abgekürzt: sin) eines Winkels versteht man das Verhältnis der Gegenkathete des Winkels zu der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

Dieser Zahlenwert $\left(\frac{a}{c} \text{ bzw. } \frac{b}{c}\right)$ ist stets ein **echter Bruch**, weil der Wert von c (als

Hypotenuse) immer größer sein muß als die Werte einer der beiden Katheten (vgl. Lehrsatz des Pythagoras, Ziffer 3). Mit diesem Zahlenwert können wir natürlich nicht viel anfangen; denn er gibt uns ja nicht die Größe des Winkels in Grad oder im Bogenmaß an.

Beispiele:

$$a = 3 \text{ cm, } c = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{c} = 3 : 5 = 0,6$$

$$a = 5 \text{ cm, } c = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{c} = 5 : 8 = 0,625$$

Wir wollen uns hierüber auch vorerst nicht den Kopf zerbrechen, sondern uns überlegen, wie wir die Berechnung des Sinuswertes einfacher gestalten können.

In den beiden obigen Beispielen haben wir das Verhältnis $\frac{a}{c}$ jeweils ausrechnen

müssen. In Ziffer 6, c haben wir gesehen, daß wir die Größe eines Winkels bestimmen können, wenn die Hypotenuse einen **gleichbleibenden** Wert hat (Fall III).

Setzen wir den Wert der Hypotenuse gleich 1 (vgl. auch Einheitskreis), so ist die

Berechnung des Sinus, also das Verhältnis $\frac{a}{c}$ immer gleich $\frac{a}{1} = a$. Wir wollen

hierzu unsere vorhergehenden Rechenbeispiele betrachten.

Hier hatten wir einmal für a 3 cm, für c 5 cm und dann für a 5 cm und für c 8 cm gesetzt. Wir wollen jetzt diese Rechnung so umwandeln, daß wir in beiden Fällen $c = 1$ setzen können.

Im Beispiel 1) war $c = 5$ cm. Um c auf den Wert 1 zu bringen, müssen wir also c durch 5 teilen. Was wir mit c gemacht haben, muß selbstverständlich auch mit a geschehen, sonst würde der Wert von a um das Fünffache zu groß sein.

Also:

$$a = \frac{3}{5}; c = \frac{5}{5} = 1;$$

$$\frac{a}{c} = \frac{3}{5} : \frac{5}{5} = \frac{3}{5} : 1 = \frac{3}{5} = 0,6$$

Im Beispiel 2) waren $a = 5$ cm, $c = 8$ cm.

Um c auf den Wert 1 zu bringen, teilen wir c durch 8; demzufolge muß a auch durch 8 geteilt werden:

$$a = \frac{5}{8}; c = \frac{8}{8} = 1; \frac{a}{c} = \frac{5}{8} : \frac{8}{8} = \frac{5}{8} : 1 = \frac{5}{8} = 0,625$$

Wenn wir zur Vereinfachung unserer Rechnungen die Hypotenuse gleich 1 setzen, so können wir einen Schritt weitergehen und den **Radius** des Einheitskreises stets als die **Hypotenuse** eines rechtwinkligen Dreiecks auffassen. Wir wollen das an Hand der Abb. 14 und 15 erläutern.

Wir zeichnen ein Viertel eines Einheitskreises, den I. Quadranten (vgl. Ziffer 4), auf, und teilen den Kreisbogen über dem Quadranten in Winkel von je 10 Grad. Hierzu nehmen wir Zirkel und Winkelmesser zur Hand (Abb. 14).

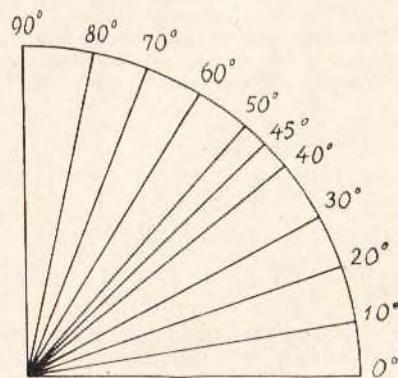


Abb. 14

Aus Übersichtlichkeitsgründen wählen wir den Radius $r = 10$ cm. Wir erhalten somit 9 Winkel zu je 10°. Zuletzt zeichnen wir den Winkel von 45° ein. In Abb. 14 und 15 ist jedoch aus Raumgründen von der Länge des Radius = 10 cm abgewichen worden. Es wird daher empfohlen, diese Zeichnung maßstabsgerecht selbst herzustellen. Nun fallen wir von jedem Schnittpunkt der Winkelschenkel mit dem Bogen das Lot und erhalten das Bild Abb. 15.

Wir erkennen, daß wir 9 rechtwinklige Dreiecke gewonnen haben, deren rechte Winkel durch die Strecke MA (Abb. 15) liegen. Der Winkel α ist der Winkel, der jeweils durch die Strecke MA und den Schenkel gebildet wird, der durch 10°, 20°, 30° usw. hindurchgeht. Die Seiten MA_1, MA_2, MA_3, MA_4 usw. stellen die **Ankatheten** zu den Winkeln $\alpha = 10^\circ, \alpha = 20^\circ, \alpha = 30^\circ, \alpha = 40^\circ$ usw. dar. Die

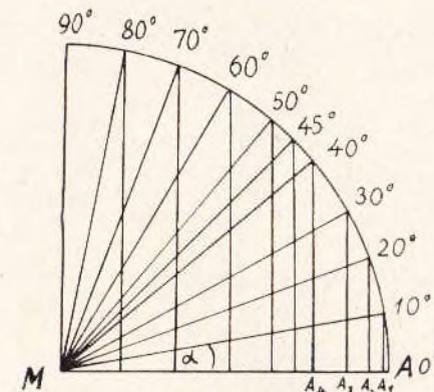


Abb. 15

Hypotenusen werden in allen Fällen durch den Radius r des Quadranten (Strecke $MA = 1$) gebildet.

Jetzt wir messen die Längen der Gegenkatheten 10° bis MA_1 , 20° bis MA_2 , 30° bis MA_3 usw. und stellen eine Tabelle auf. Die Länge der Gegenkatheten und damit das Verhältnis der Gegenkatheten zur Hypotenuse (als Radius des Einheitskreises), d. h. der Sinus des Winkels α , beträgt:

$\alpha = 0^\circ$	$\sin \alpha = 0$
$\alpha = 10^\circ$	$\sin \alpha = 0,17$
$\alpha = 20^\circ$	$\sin \alpha = 0,34$
$\alpha = 30^\circ$	$\sin \alpha = 0,5$
$\alpha = 40^\circ$	$\sin \alpha = 0,64$
$\alpha = 45^\circ$	$\sin \alpha = 0,7$
$\alpha = 50^\circ$	$\sin \alpha = 0,77$
$\alpha = 60^\circ$	$\sin \alpha = 0,87$
$\alpha = 70^\circ$	$\sin \alpha = 0,94$
$\alpha = 80^\circ$	$\sin \alpha = 0,98$
$\alpha = 90^\circ$	$\sin \alpha = 1,0$

Warum ist der Sinus des Winkels α bei $0^\circ = 0$ und bei $90^\circ = 1$? Im Falle I ($\alpha = 0^\circ$) fällt ja der zweite Winkelschenkel, also die Hypotenuse, mit der Strecke MA zusammen, so daß kein Lot gefällt werden kann. Im Falle II ($\alpha = 90^\circ$) ist der Sinus gleich der Länge des Radius, also 1. Alle Zwischenwerte des Winkels α liegen zwischen 0° und 90° , und somit liegen die Sinuswerte zwischen 0 und 1.

Der Sinus eines Winkels ist stets ein **echter Bruch**. Bei einem Winkel von 0° ist der Sinus gleich Null, bei einem Winkel von 90° ist er gleich 1. Sinus und Winkelgröße sind bei einem Winkel von 0° — 90° proportional. Der Sinus wächst hierbei von dem Wert 0 bis zum Werte 1.

Die genauen Sinuswerte von Grad zu Grad sind in der Tabelle im Anhang zu finden.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der zweite Schenkel unseres Winkels α (Abb. 14/15) beweglich ist, so wie es unter Ziffer 2 (Winkelgeschwindigkeit ω) beschrieben

wurde. Der Schenkel MA bleibt stets in der ursprünglichen Lage. Wie sieht es mit dem Sinus aus, wenn der bewegliche Schenkel über 90° hinausgeht und bis 180°, also bis zum Punkt B der Abb. 16, wandert?

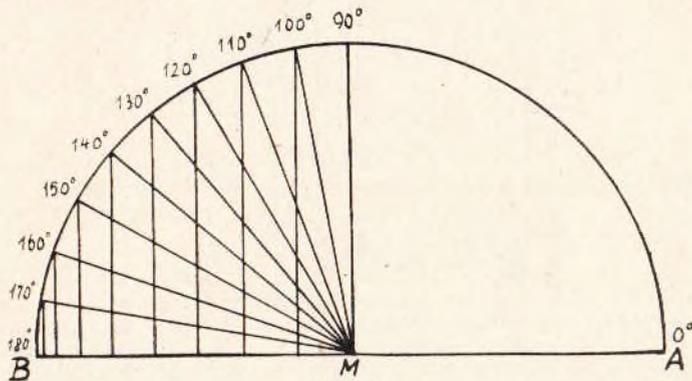


Abb. 16

Wir stellen fest, daß der Sinus von dem Wert 1 bei 90° auf den Wert 0 bei 180° fällt. Bewegen wir unseren Schenkel weiter von 180° auf 270°, so sehen wir, daß der Sinus wiederum von 0 bis 1 steigt und dann – bei einer vollen Umdrehung – von 270° bis 360° (oder 0°) von 1 auf 0 fällt.

Den so gewonnenen Einheitskreis teilen wir in vier Sektoren zu je 90°, also in vier Quadranten auf (Abb. 17), die wir – wie in Ziffer 4 dargelegt – I, II, III und IV benennen.

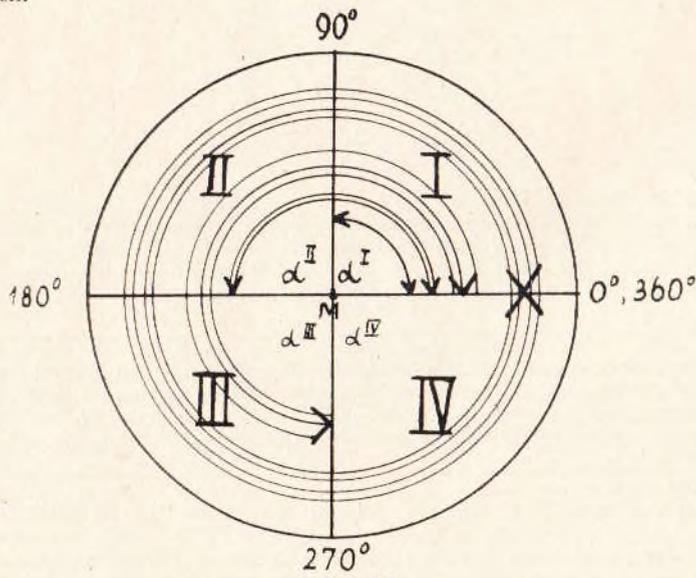


Abb. 17

Mit Hilfe dieser Benennungen fällt es uns leichter, das Verhalten des Sinus im Einheitskreis in einen Satz zu kleiden. **Quadrant I** umfaßt den Winkel von 0° – 90°. In ihm liegt der Winkel αI , der mit **einem** Bogen gekennzeichnet ist, und dessen Sinus einen positiven Wert hat.

Quadrant II umfaßt den Winkel von 90° – 180°. In ihm liegt der Winkel αII , der mit **zwei** Bogen gekennzeichnet ist, und dessen Sinus ebenfalls einen positiven Wert hat. **Quadrant III** umfaßt den Winkel von 180° – 270°. In ihm liegt der Winkel αIII , der mit **drei** Bogen gekennzeichnet ist. **Quadrant IV** umfaßt den Winkel von 270° – 360° bzw. 0° (als Ausgangspunkt). In ihm liegt der Winkel αIV , der mit **vier** Bogen gekennzeichnet ist. Die Sinuswerte von αIII und αIV sind **negativ**.

Wir können jetzt festlegen:

Der Sinus eines Winkels im ersten Quadranten des Einheitskreises steigt von 0 bis +1, im zweiten Quadranten fällt er von +1 bis 0, im dritten Quadranten fällt er von 0 bis –1 und im vierten Quadranten steigt er von –1 bis 0.

Um den Sinus eines Winkels zwischen 0° und 180° (αII) zu bestimmen, brauchen wir lediglich von 180° den Winkelwert von αII abzuziehen; die Differenz ergibt einen Winkelwert, der für die Größe des Sinus von αII bestimmend ist.

Beispiele:

a) Wie groß ist der Sinus eines Winkels αII von 170°?

Lösung: $180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$
 $\sin 10^\circ = 0,17$
 $\sin 170^\circ = 0,17$

b) Wie groß ist der Sinus eines Winkels αII von 110°?

Lösung: $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
 $\sin 70^\circ = 0,94$
 $\sin 110^\circ = 0,94$

c) Wie groß ist der Sinus eines Winkels αII von 180°?

Lösung: $180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$
 $\sin 0^\circ = 0$
 $\sin 180^\circ = 0$

Mit dieser Aufgabe haben wir gleichzeitig die vorhergegangenen Ausführungen rechnerisch bewiesen.

Ist der Sinus eines Winkels, der zwischen 180° und 270° (αIII) liegt, festzustellen, so ziehen wir von αIII 180° ab und berechnen aus der Differenz den Sinus. Der Zahlenwert ist negativ.

Beispiele:

a) Wie groß ist der Sinus eines Winkels αIII von 210°?

Lösung: $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$
 $\sin 30^\circ = 0,5$
 $\sin 210^\circ = -0,5$

b) Wie groß ist der Sinus eines Winkels αIII von 250°?

Lösung: $250^\circ - 180^\circ = 70^\circ$
 $\sin 70^\circ = 0,94$
 $\sin 250^\circ = -0,94$

c) Wie groß ist der Winkel α , wenn sein $\cos 0,94$ beträgt?

Lösung: Wir suchen zunächst in der Spalte „Cosinus“ (von unten nach oben!) den Wert 0,94 und lesen rechts unter Spalte α° den Wert 20° ab.

d) Wie groß ist der \cos eines Winkels von 40° ?

Lösung: Wir suchen in der rechten Spalte „ α° “ den Winkel 40° und finden links daneben den Cosinuswert 0,77.

Sinus und Cosinus spielen in der Elektrotechnik eine nicht unbedeutende Rolle. Neben diesen beiden Begriffen wollen wir noch einen dritten kennenlernen: den **Tangens** eines Winkels.

(9) Der Tangens (tg) eines Winkels

Auch der Tangens (abgekürzt tg) eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck wird uns keine Schwierigkeiten bereiten. Wir haben ihn ja schon (unbewußt) kennengelernt.

Unter dem Tangens (abgekürzt tg) eines Winkels versteht man das Verhältnis seiner Gegenkathete zu seiner Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck.

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

Ohne näher auf Erläuterungen einzugehen, soll hier lediglich gesagt werden, daß der Tangens eines Winkels zwischen 0° und 90° von 0 bis ∞ (unendlich) steigt. Auch die Tangenswerte sind – wie die Sinus- und Cosinuswerte – in einer Tabelle zusammengestellt und leicht zu ermitteln (s. Anhang).

(10) Die Sinuskurve

Im Band IIa hatten wir bereits bei der Behandlung des Wechselstroms den Ausdruck „sinusförmig“ gebraucht. Ein solcher sinusförmiger Wechselstrom ist die Idealform; wir finden sie z. B. bei unserem technischen Wechselstrom von 50 Hz.

Was versteht man unter dem Ausdruck sinusförmig?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die Abb. 18.

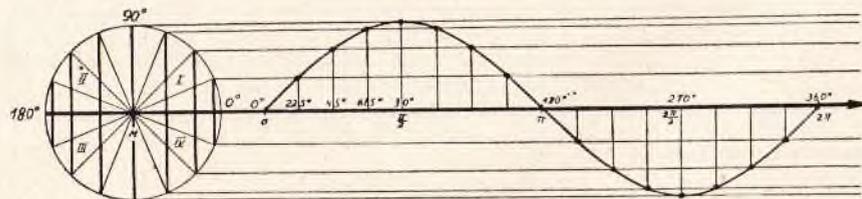


Abb. 18

Wir sehen links den Einheitskreis, dessen Umfang wir in 16 gleiche Teile eingeteilt haben. Ziehen wir von den so gefundenen Punkten Verbindungslinien zum Mittelpunkt M des Kreises, so erhalten wir (vgl. Abb. 15 und 16) eine bestimmte Anzahl

von Winkeln, nämlich auch 16. Die Länge der Gegenkatheten jedes dieser Winkel entspricht dann dem Wert des Sinus (vgl. Ziffer 7). Jetzt verlängern wir den Durchmesser des Einheitskreises $180^\circ - M - 0^\circ$ nach rechts und stellen uns vor, daß wir den Umfang des Einheitskreises auf dieser Linie abrollen, etwa so, wie man das mit einem kreisförmig gelegten Bindfaden machen kann. Dieser „abgerollte“ Umfang des Kreises ist nun eine Gerade geworden, deren Länge 2π beträgt (vgl. Ziffer 1, „Grad- und Bogenmaß“). Die Länge dieser Strecke würde also 6,28 sein. An den Anfang der Strecke können wir demnach den Wert 0 setzen und am Ende der

Strecke 2π . Die Mitte dieser Strecke entspricht dem Wert π , das erste Viertel $\frac{\pi}{2}$,

das dritte Viertel $\frac{3\pi}{2}$. Da, wie wir wissen, diese π -Werte sich auch im Gradmaß

ausdrücken lassen, können wir über $\frac{\pi}{2} 90^\circ$, über $\pi 180^\circ$, über $\frac{3\pi}{2} 270^\circ$ und über

$2\pi 360^\circ$ setzen. Damit haben wir auf dieser Geraden nicht nur das Bogenmaß, sondern auch das Gradmaß eingetragen.

Nun können wir mit der Zeichnung der Sinuskurve beginnen. Wir legen hierbei keinen Wert auf höchste Genauigkeit; denn es kommt uns ja nur darauf an, das Zustandekommen einer Sinuskurve zu verstehen. Wir ziehen von den Schnittpunkten des Kreisumfangs mit den Winkelschenkeln zu der Grundlinie Parallelen. Der Abstand dieser Parallelen zur Grundlinie entspricht dann dem jeweiligen Sinuswert der Winkel. Da wir den Umfang des Kreises in 16 gleiche Teile geteilt haben, um 16 Winkel zu erhalten (und damit auch 16 Gegenkatheten), müssen wir die Strecke 0 bis 2π ebenfalls in 16 gleiche Teile teilen. Jede Teilstrecke hat dann eine Länge von $6,28 : 16 = 0,3925$, was einem Winkel von $0,3925 \times 57,3$ gleich $22,5^\circ$ entspricht (vgl. Ziffer 1, Umrechnung vom Bogenmaß ins Gradmaß und umgekehrt). Wenn wir diese 16 Winkel in Gedanken mit α_1 bis α_{16} bezeichnen, so ist $\alpha_1 = 22,5^\circ$, $\alpha_2 = 2 \times 22,5 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 3 \times 22,5 = 67,5^\circ$, $\alpha_4 = 4 \times 22,5 = 90^\circ$ usw. Von den so gewonnenen Punkten zeichnen wir Linien, die senkrecht zur Grundlinie verlaufen, und zwar von 0° bis 180° nach oben und von 180° bis 360° nach unten. Die erste Linie führen wir so weit, daß sie die erste Parallele schneidet; ihre Länge entspricht dann der Länge der Gegenkathete des Winkels $\alpha_1 = 22,5^\circ$. Hier machen wir einen Punkt. Die zweite Linie führen wir bis zur zweiten Parallelen. Hier machen wir wieder einen Punkt; die Länge dieser Strecke entspricht dann der

Gegenkathete des Winkels $\alpha_2 = 45^\circ$. Bei $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ hat die Strecke dann den Wert 1,

also den Höchstwert. Im zweiten Quadranten des Einheitskreises fallen ja bekanntlich die Sinuswerte von 1 auf 0. Demzufolge werden unsere senkrechten Linien immer kürzer, bis bei 180° oder π die Grundlinie erreicht ist. Dasselbe wiederholen wir auf der Strecke von 180° bis 360° , nur mit dem Unterschied, daß jetzt die gefundenen Punkte **unterhalb** der Geraden liegen. Verbinden wir alle diese Punkte kurvenförmig miteinander, so erhalten wir die eingangs erwähnte Sinuskurve. Je kleiner wir die Winkelwerte wählen, um so genauer wird selbstverständlich die Kurve, weil wir eine größere Anzahl von Punkten gewinnen, die wir miteinander verbinden können.

Übertragen wir die jetzt gewonnenen Erkenntnisse auf einen sinusförmigen Wechselstrom oder auf eine sinusförmige Wechselspannung (als Ursache für den Wechselstrom), so haben wir bei 90° einen positiven Höchstwert, bei 270° einen negativen Höchstwert und bei 0° , 180° und 360° die Strom- oder Spannungswerte 0. Alle Werte zwischen 0° und 90° , 180° und 270° sowie zwischen 270° und 360° nennen wir die **Augenblickswerte** des Wechselstromes oder der Wechselspannung. Für die Höchstwerte wollen wir das Formelzeichen I_{\max} bzw. U_{\max} benutzen.

Die Kurve des Cosinus hat bei Beachtung der Verschiebung um 90° die gleiche Form wie die Sinuskurve, nur daß sie bei 0° den positiven Höchstwert hat, bei 90° auf 0 abfällt, bei 180° den negativen Höchstwert erreicht und bis 270° auf 0 sinkt. Sie ist also um 90° gegenüber der Sinuskurve verschoben.

(11) Die Berechnung des induktiven Scheinwiderstandes

Am Schluß des Bandes IIa hatten wir das Wesen des induktiven Scheinwiderstandes besprochen und festgestellt, daß er abhängig ist von der Frequenz f des Wechselstromes sowie von der Größe der Induktivität L . Wir hatten ferner gesehen, daß der Scheinwiderstand mit zunehmender Frequenz und Induktivität wächst. Einen solchen Widerstand nennt man einen **frequenzabhängigen** Widerstand.

Jede Induktivität (z. B. eine Drosselspule) hat auch einen Ohmschen Widerstand, der durch die Länge, den Durchmesser und den spezifischen Widerstand des Wicklungsdrahtes bestimmt wird. Wir haben demzufolge neben dem reinen frequenzabhängigen Wechselstromwiderstand auch den Ohmschen Widerstand zu berücksichtigen. Der frequenzabhängige Widerstand, **Blindwiderstand** (R_b) genannt, errechnet sich zu $\omega \times L = 2 \pi f \times L$, d. h. aus der Kreisfrequenz mal der Größe der Induktivität in Henry (hierzu vgl. Band IIa und Ziffer 2 dieses Bandes).

Aus den in Ziffer 4 dargelegten Gründen können wir den Ohmschen Widerstand R und den Blindwiderstand $R_b = \omega L$ nicht algebraisch zusammenzählen. Wir müssen die geometrische Addition anwenden.

Hierzu betrachten wir Abb. 19.

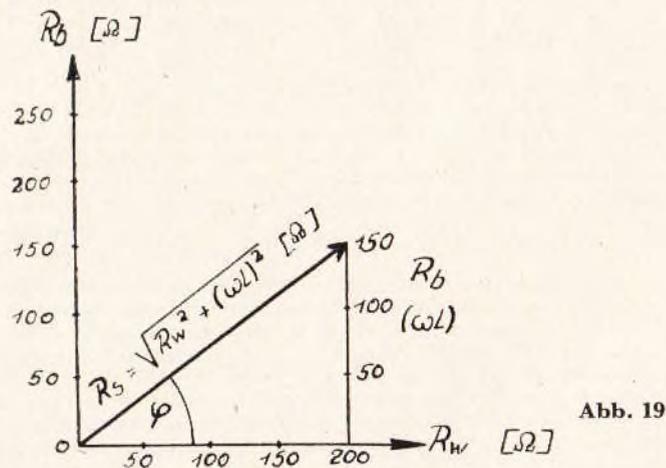


Abb. 19

Hier ist auf der waagerechten Linie, die man x-Achse oder Abszisse nennt, der Wert des Ohmschen Widerstandes in einem bestimmten Längenmaß abgetragen. Dieses beträgt in dem Beispiel für je 50Ω 1 cm, so daß wir mit 4 cm Länge den Wert von 200Ω dargestellt haben. Diesen Ohmschen Widerstand wollen wir in Zukunft mit **Wirkwiderstand** (R_w) bezeichnen, weil er auf die Wirkungen des elektrischen Stromes anspricht und eine Wärmeentwicklung $0,24 \times I^2 \times R \times t$ hervorruft. Dort, wo wir den Widerstand $R_w = 200 \text{ Ohm}$ entsprechend einer Länge von 4 cm abgetragen haben, errichten wir eine Senkrechte und tragen im gleichen

Maßstab ($50 \Omega = 1 \text{ cm}$) den Wert des Blindwiderstandes $R_b = \omega L$ ab, der in diesem Falle 150 Ohm betragen möge. Diese Strecke hat somit eine Länge von 3 cm. Wir verbinden jetzt den Nullpunkt des Achsenkreuzes mit dem Endpunkt der Senkrechten R_b , d. h. bei 150 Ohm , und erhalten nunmehr ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten aus der Strecke $R_w = 200 \text{ Ohm}$ und der Strecke $R_b = \omega L = 150 \text{ Ohm}$ gebildet werden. Die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks ergibt nun den Betrag des Scheinwiderstandes R_s *, der sich errechnet zu

$$R_s^2 = R_w^2 + R_b^2 \quad [\Omega]$$

$$R_s = \sqrt{R_w^2 + R_b^2} \quad [\Omega]$$

Da aber R_b sich weiter errechnet aus $\omega \times L$, so müssen wir die Formel wie folgt ergänzen:

$$R_s = \sqrt{R_w^2 + (\omega L)^2} \quad [\Omega]$$

Wir wollen dieses Beispiel einmal durchrechnen.

Der Wirkwiderstand R_w beträgt bekanntlich 200 Ohm , der induktive Blindwiderstand ωL 150 Ohm .

Also ist:

$$R_w^2 = 200^2 = 200 \times 200 = 40\,000$$

$$R_b^2 = 150^2 = 150 \times 150 = 22\,500$$

$$R_w^2 + R_b^2 = 40\,000 + 22\,500 = 62\,500$$

$$R_s = \sqrt{62\,500} = 250 \Omega$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2\,2\,5 : 45 \\ \underline{2\,2\,5} \\ 0\,0\,0\,0 \end{array}$$

Der induktive Scheinwiderstand R_s hat somit einen Betrag von 250Ω .

Beispiel 1:

Eine Drosselspule mit einer Induktivität von $2,5 \text{ H}$ und einem Ohmschen Widerstand von 600Ω liegt in einem Wechselstromkreis mit einer Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$. Wie groß ist der Betrag des Scheinwiderstandes R_s ?

Lösung: $R_s = \sqrt{R_w^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R_w^2 + (2 \pi f \times L)^2}$

$$= \sqrt{600^2 + (2 \times 3,14 \times 50 \times 2,5)^2}$$

$$= \sqrt{600^2 + (314 \times 2,5)^2}$$

$$= \sqrt{600^2 + 785^2}$$

$$= \sqrt{360\,000 + 616\,225}$$

$$= \sqrt{9\,76\,225} = 988 \Omega$$

$$\begin{array}{r} 8\,1 \\ 1\,6\,6\,2 : 188 \\ \underline{1\,5\,0\,4} \\ 1\,5\,8\,2\,5 : 1968 \\ \underline{1\,5\,7\,4\,4} \\ 8\,1 \end{array}$$

Der Betrag des Scheinwiderstandes bei $f = 50 \text{ Hz}$ ist 988Ω .

*) Anm.: An Stelle des Formelzeichens R_s findet man häufig das große deutsche R (\Re). Der Betrag (der Zahlenwert) von R wird dann durch zwei senkrechte Striche, die das R rechts und links begrenzen (\Re) mit dahintergesetzter Zahl, z. B. $\Re = 750 \Omega$, dargestellt.

Beispiel 2:

Dieselbe Drosselspule liegt in einem Wechselstromkreis mit einer Frequenz $f = 800$ Hz. Wie groß ist jetzt der Betrag des Scheinwiderstandes?

Lösung:

$$\begin{aligned}
 R_s &= \sqrt{R_w^2 + (\omega L)^2} \\
 &= \sqrt{600^2 + (2 \pi f \times L)^2} \\
 &= \sqrt{600^2 + (5000 \times 2,5)^2} \\
 &= \sqrt{600^2 + 12\,500^2} \\
 &= \sqrt{360\,000 + 156\,250\,000}
 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist das Quadrat aus dem Wert des Wirkwiderstandes R_w (600^2) über 400mal kleiner als das Quadrat aus ωL ($12\,500^2$). Bei der Berechnung des Scheinwiderstandes können wir in diesem oder ähnlich gelagerten Fällen das Quadrat des Wirkwiderstandes vernachlässigen. Ob wir zu dem Wert $(\omega L)^2 = 156\,250\,000$ noch $360\,000$ hinzuzählen und aus dieser Summe die Wurzel ziehen, spielt gegenüber der Größe des Wertes $R_b^2 = (\omega L)^2$ praktisch keine Rolle. Der Unterschied kann höchstens einige wenige Ohm oder gar Bruchteile von Ohm betragen. Es ist also eine Sache der Überlegung, ob man den Wirkwiderstand zu einem sehr hohen Blindwiderstandswert hinzurechnet oder ihn wegläßt. In diesem Beispiel würde er, um die Rechnung zu vereinfachen, fortgelassen werden können; denn der aufgerundete Betrag des Scheinwiderstandes wird allein durch den **Blindwiderstand** bestimmt.

Die Zeichnung Abb. 20 mag das veranschaulichen.

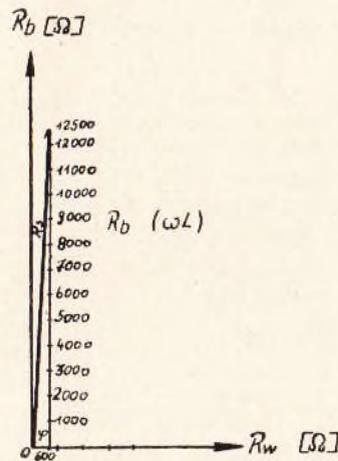


Abb. 20

ωL beträgt nach unserer Rechnung $12\,500 \Omega$, wohingegen R_w nur den Wert 600Ω hat. Es ergibt sich somit schon rein zeichnerisch, daß ωL den Scheinwiderstand fast ausschließlich bestimmt. Wir wählen für je 1000Ω eine Strecke von $0,5$ cm; das ergibt für 600Ω folgende Länge:

$$\begin{aligned}
 1000 \Omega &= 0,5 \text{ cm} \\
 600 \Omega &= ? \text{ cm} \\
 \frac{0,5 \times 600}{1000} &= \frac{3}{10} \text{ cm} = 0,3 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

für $12\,500 \Omega$ jedoch $6,25$ cm.

Verbinden wir den Punkt $12\,500$ mit dem Nullpunkt, so erkennen wir auch hier, daß die 600Ω des Wirkwiderstandes praktisch keine Rolle spielen, sondern daß die Länge der Hypotenuse R_s fast ausschließlich von dem Blindwiderstand R_b bestimmt wird.

Aus diesen beiden Beispielen erschen wir, daß mit **steigender** Frequenz der **Blindwiderstand** R_b immer mehr den Betrag des Scheinwiderstandes R_s beeinflusst, und daß bei höheren Frequenzen der Wirkwiderstand R_w vernachlässigt werden kann.

(12) Die Berechnung des kapazitiven Scheinwiderstandes

Am Schluß des Bandes Ib hatten wir den kapazitiven Scheinwiderstand eines Kondensators behandelt und festgestellt, daß eine Kapazität – wie eine Induktivität – ein frequenzabhängiger Widerstand ist. Des weiteren haben wir gesehen, daß der kapazitive Scheinwiderstand sich **umgekehrt** verhält wie der induktive, das heißt, daß er mit **steigender** Frequenz f **kleiner** wird.

Bekanntlich drückt man umgekehrte Verhältnisse dadurch aus, daß man einen Bruch schreibt, dessen Zähler den Wert 1 hat. (Vgl. Band Ia, Ziffer 11 „Der Leitwert als Kehrwert des Widerstandes“.)

Da ein Kondensator im allgemeinen mit Ohmschen Widerständen in Reihe geschaltet wird, ergibt sich eine ähnliche Darstellung und Berechnung des kapazitiven Scheinwiderstandes wie bei dem des induktiven. Abb. 21 zeigt uns die zeichnerische Darstellung.

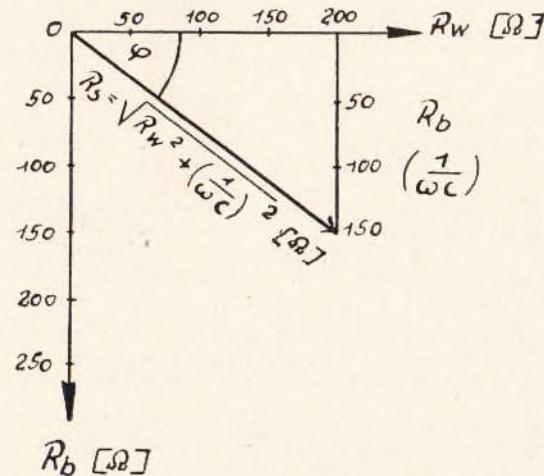


Abb. 21

Auch hier wird auf der waagerechten Linie (x-Achse) der Ohmsche (Wirk-) Widerstand R_w abgetragen, der ebenfalls 200 Ω betragen möge. Der frequenzabhängige kapazitive Blindwiderstand R_b errechnet sich zu $\frac{1}{\omega \times C} = \frac{1}{2 \pi f \times C}$, wobei der Wert von C in **Farad** einzusetzen ist. Dieser Wert von R_b wird nach **unten** abgetragen. Hierdurch kommt das entgegengesetzte Verhalten von $\frac{1}{\omega C}$ zu dem induktiven Blindwiderstand ωL zum Ausdruck (Lage im IV. Quadranten). Wir wollen hier auch einen kapazitiven Blindwiderstand von 150 Ω annehmen und tragen diesen Betrag auf dem im Punkt $R_w = 200 \Omega$ zu fallenden Lot im gleichen Maßstab ab wie in Abb. 19. Die Verbindungslinie vom Nullpunkt bis $R_b = 150 \Omega$ ergibt den Betrag des kapazitiven Scheinwiderstandes.

Es ist also auch hier

$$R_s = \sqrt{R_w^2 + R_b^2} [\Omega].$$

Da der kapazitive Blindwiderstand R_b sich errechnet zu $\frac{1}{\omega C}$, so müssen wir die Formel für den kapazitiven Scheinwiderstand wie folgt aufstellen:

$$R_s = \sqrt{R_w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} [\Omega]$$

Wir wollen auch dieses Beispiel durchrechnen.

Der Wirkwiderstand R_w beträgt 200 Ω und der kapazitive Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ 150 Ω wie im Beispiel Ziffer 11.

Also ist:

$$\begin{aligned} R_w^2 &= 200^2 = 200 \times 200 = 40\,000 \\ R_b^2 &= 150^2 = 150 \times 150 = 22\,500 \\ R_w^2 + R_b^2 &= 40\,000 + 22\,500 = 62\,500 \\ R_s &= \sqrt{62\,500} = 250 \Omega \end{aligned}$$

Der kapazitive Scheinwiderstand R_b hat hier ebenfalls den gleichen Betrag wie der in Ziffer 11 berechnete induktive Scheinwiderstand, nämlich 250 Ω . Dieses ist auch verständlich, weil wir die gleichen Werte eingesetzt haben. Wir werden auf die Gegenüberstellung dieser beiden Rechnungen im weiteren Verlauf der Wechselstromlehre zurückkommen.

Zwei Rechenbeispiele für die Berechnung des kapazitiven Scheinwiderstandes seien hier aufgeführt. Die Berechnung von $R_b = \frac{1}{\omega C}$ ist etwas schwieriger als die Beispiele in Ziffer 11, weil wir für den Wert von R_b eine Bruchrechnung durchführen und die Kapazität in **Farad** ausdrücken müssen. Das bedeutet, daß die gebräuchlichsten Größen (Mikro-, Nano- oder Picofarad) als Zehnerpotenz des **Farad** zu erscheinen haben.

Im Band Ib, Ziffer 31, haben wir bereits davon gesprochen, daß

$$\begin{aligned} 1 \mu\text{F} &= 10^{-6} = \frac{1}{1\,000\,000} \text{F}, \\ 1 \text{nF} &= 10^{-9} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} \text{F} = \frac{1}{1\,000} \mu\text{F} \text{ und} \\ 1 \text{pF} &= 10^{-12} = \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} \text{F} = \frac{1}{1\,000} \text{nF} = \\ &= \frac{1}{1\,000\,000} \mu\text{F} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Was eine Potenz ist, wissen wir alle, nämlich eine Grundzahl mit einer Hochzahl. Die Hochzahl stellt einen Rechenbefehl dar, und zwar gibt sie an, wie oft die Grundzahl als Faktor aufzutreten hat.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 10^3 &= 10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \\ 10^6 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000 \\ 10^9 &= 10 \times 10 = 1\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

10^3 bedeutet, daß die Grundzahl 10 dreimal als Faktor auftritt, d. h. $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$; 10^6 bedeutet, daß die Grundzahl 10 sechsmal als Faktor auftritt, d. h. $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$ usw.

10^2 sind 100, 10^3 sind 1 000, 10^6 sind 1 000 000. Die Hochzahl bei den Potenzen mit der Basis 10 gibt uns also an, wieviel Nullen hinter die Ziffer 1 zu setzen sind. Wir können demnach sofort erkennen, daß 1 mal 10^3 gleich einer Eins mit 3 Nullen = 1 000, 1 mal 10^6 gleich einer Eins mit 6 Nullen = 1 000 000 ist.

Wir können diese 1 durch jeden beliebigen Faktor ersetzen und erhalten dadurch einen entsprechend größeren Wert der Zehnerpotenz. Zum Beispiel sind $3 \times 10^3 = 3 \times 1\,000 = 3\,000$, 5×10^6 sind $5 \times 1\,000\,000 = 5\,000\,000$.

Eine Zehnerpotenz kann also aus einem Faktor und der eigentlichen Zehnerpotenz bestehen. Der Faktor vor der Zehnerpotenz braucht aber keineswegs eine ganze Zahl zu sein, sondern er kann auch ein Dezimalbruch sein. (Siehe z. B. Band Ib, nach dem die Elektrizitätsmenge Q von einem Coulomb einer Anzahl von $6,29 \times 10^{18}$ Elektronen entspricht. Nehmen wir diese Zehnerpotenz als Beispiel, so sehen wir, daß dieser Zahlenwert in den Faktor 6,29 und den Faktor 10^{18} zerlegt ist. $6,29 \times 10^{18}$ ergibt also einen Wert von 6,29 mal einer Eins mit 18 Nullen.)

Was bedeutet aber eine Potenz, deren Hochzahl ein Minuszeichen (z. B. 10^{-6}) vorgesetzt wird? Ohne auf lange mathematische Erörterungen einzugehen, wollen wir uns merken, daß der sogenannte „negative“ Potenzexponent zu einem Bruch führt, dessen Zähler Eins und dessen Nenner die Zehnerpotenz mit **positiver** Hochzahl ist. 10^{-6} bedeutet also

$$\frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000} = \text{einnillionstel,}$$

$$10^{-2} \text{ ist } \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = \text{einhundertstel}$$

usw. Aus obigen Überlegungen ergeben sich die vorher erwähnten Zehnerpotenzen für $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{F}$, $1 \text{nF} = 10^{-9} \text{F}$ und $1 \text{pF} = 10^{-12} \text{F}$.

Nun haben wir es leider nicht immer mit **einem** Mikro-, Nano- oder Picofarad zu tun, sondern mit einer Vielzahl dieser Einheiten, z. B. 2 μF , 300 nF usw. Wie schreibt man diese Werte als Zehnerpotenz, bezogen auf 1 Farad? Nach unseren vorherigen Überlegungen macht uns das keine Schwierigkeiten. 2 μF sind eben

$2 \times 10^{-6} \text{ F}$, $300 \text{ nF} = 300 \times 10^{-9} \text{ F}$, $0,5 \mu\text{F} = 0,5 \times 10^{-6} \text{ F}$ usw. Wir können zwar diese Schreibweise z.T. vereinfachen, wollen es aber hiermit bewenden lassen. Wir betrachten unseren Kondensator zu $2 \mu\text{F}$ in rechnerischer Hinsicht. $2 \mu\text{F}$ kann man also schreiben als $2 \times 10^{-6} \text{ F} = 2 \times \frac{1}{10^6} = 2 \times \frac{1}{1\,000\,000} =$ zwei Millionstel Farad.

Nun kommen wir zu unserem kapazitiven Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$. Wir nehmen an, daß der Kondensator eine Kapazität von $2 \mu\text{F}$ hat und der Wechselstrom eine Frequenz f von 50 Hz . $2 \mu\text{F}$ sind $2 \times 10^{-6} \text{ F}$; ω bei 50 Hz beträgt $2 \pi f = 2 \times 3,14 \times 50 = 314$.

Wir setzen jetzt diese Werte ein: $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 2 \times 10^{-6}} = \frac{1}{628 \times \frac{1}{10^6}} = \frac{10^6}{628} = 1\,000\,000 : 628 = 1592 =$ rund 1600Ω .

Wir ersetzen den Kondensator von $2 \mu\text{F}$ durch einen von $6 \mu\text{F}$ Kapazität. Der Betrag des Blindwiderstandes muß kleiner werden, weil der Nenner des Bruches größer geworden ist. $\frac{1}{\omega C}$ bei $f = 50 \text{ Hz}$ errechnet sich nach dem Vorhergegangenen

$$\text{zu } \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 50 \times 6 \times 10^{-6}} = \frac{1}{314 \times 6 \times \frac{1}{10^6}} = \frac{1\,000\,000}{1884} = \text{rund } 530 \Omega.$$

Wir erkennen also, daß mit **größer** werdender Kapazität der kapazitive Blindwiderstand **geringer** geworden ist.

Nun wollen wir die Frequenz f auf 800 Hz ($\omega = 5000$) erhöhen. Der Blindwiderstand muß nach allem, was wir bisher gesehen haben, bedeutend kleiner werden.

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{5000 \times 6 \times 10^{-6}} = \frac{1\,000\,000}{30\,000} = 33\frac{1}{3} \Omega.$$

Das, was wir über den induktiven und kapazitiven Blindwiderstand verstandesmäßig erfaßt haben, ist hiermit rechnerisch bewiesen.

Die Berechnung des kapazitiven Scheinwiderstandes ist nun für uns eine einfache Sache; denn jetzt brauchen wir nur das Quadrat des Wirkwiderstandes R_w zum

Quadrat des Blindwiderstandes $\frac{1}{\omega C}$ hinzuzählen und aus dieser Summe die Wurzel ziehen.

Wir wollen, damit wir nicht soviel zu rechnen haben, die Kapazität von $6 \mu\text{F}$ und die Frequenzen 50 bzw. 800 Hz beibehalten. Der Wirkwiderstand R_w soll 500Ω betragen. Wie groß ist in beiden Fällen der Betrag des Scheinwiderstandes R_s ?

$$\begin{aligned} \text{a) } R_s &= \sqrt{R_w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ &= \sqrt{500^2 + 530^2} \\ &= \sqrt{250\,000 + 280\,900} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{53^1 0\,9^1 0\,0}{4\,9}} = \underline{\underline{728 \Omega}} \\ &\quad \frac{4\,0\,9}{2\,8\,4} : 142 \\ &\quad \frac{1\,2\,5\,0^1 0}{1\,1\,5\,8\,4} : 1448 \\ &\quad \frac{9\,1\,6}{9\,1\,6} \end{aligned}$$

Der kapazitive Scheinwiderstand beträgt bei $f = 50 \text{ Hz}$ 728Ω

$$\begin{aligned} \text{b) } R_s &= \sqrt{R_w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ &= \sqrt{250\,000 + (33\frac{1}{3})^2} \\ &= \sqrt{250\,000 + 100^2} \\ &= \sqrt{250\,000 + 10\,000} \\ &= \sqrt{2\,60\,000} = \underline{\underline{509 \Omega}} \\ &\quad \frac{2\,5}{1\,0^1 0} : 100 \\ &\quad \frac{1\,0\,0\,0^1 0}{9\,0\,8\,1} : 1009 \\ &\quad \frac{9\,1\,9}{9\,1\,9} \end{aligned}$$

Der kapazitive Scheinwiderstand beträgt bei $f = 800 \text{ Hz}$ 509Ω

Hier erkennen wir das Umgekehrte wie beim induktiven Scheinwiderstand: ist das

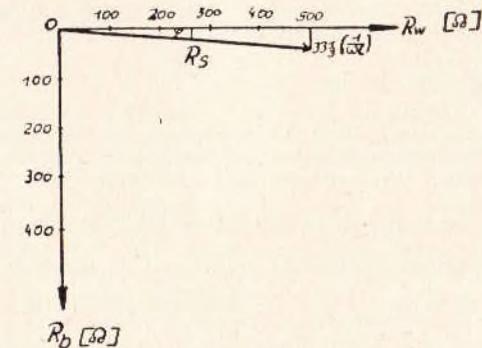


Abb. 22

Verhältnis von R_w^2 zu $\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2$ so, daß R_w^2 wesentlich größer ist als $\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2$, dann kann der kapazitive Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ vernachlässigt werden. Der Betrag des Scheinwiderstandes R_s wird dann hauptsächlich durch den **Wirkwiderstand** R_w bestimmt (vgl. Abb. 22).

Um es zu wiederholen:

1. Der induktive Scheinwiderstand wächst mit steigender Frequenz f und größer werdender Induktivität L ,

$$R_s = \sqrt{R_w^2 + (\omega L)^2}$$
2. Der kapazitive Scheinwiderstand fällt mit steigender Frequenz f und größer werdender Kapazität C ,

$$R_s = \sqrt{R_w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
3. Induktiver und kapazitiver Scheinwiderstand stehen im umgekehrten Verhältnis zueinander.

(13) Die Phasenverschiebung

Eine Kapazität sowie eine Induktivität in einem Wechselstromkreis verursachen eine nicht leicht verständliche Erscheinung, die man „**Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung**“ nennt.

Unter einer „Phase“ versteht man den Zustand einer sinusförmigen Kurve zu einem bestimmten Zeitpunkt. In der Abb. 18 hat die Phase des Wechselstromes (bei einer angenommenen Frequenz von 50 Hz) zu der Zeit $t = 0$ sec den Wert Null, aber auch den Wert Null nach $\frac{1}{100}$ sec (gleich einer halben Umdrehung der

Leiterschleife gem. Abb. 3 und 4) und wiederum den Wert Null nach $\frac{1}{50}$ sec (gleich einer ganzen Umdrehung). Das gleiche gilt auch für jeden Augenblickswert der Kurve, wenn wir nur den Zahlenwert betrachten, z. B. bei 45° , $45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ usw.

Sehen wir uns jetzt die Abb. 23 an:

Wir erkennen ein Achsenkreuz mit einer waagerechten Achse (x-Achse oder Abszisse) und einer senkrechten Achse (y-Achse oder Ordinate). Die x-Achse schneidet die y-Achse im Punkt 0. Auf der x-Achse als Nulllinie tragen wir eine Sinuskurve ab, die einen Wechselstrom von der Frequenz $f = 50$ Hz darstellen

möge (dicke Linie). Nach $\frac{1}{50}$ sec (entsprechend 360°) hat der Strom eine Periode durchlaufen. Den positiven Höchstwert (z. B. + 3 A), den wir an der y-Achse ablesen können, hat er nach $\frac{1}{200}$ sec (entsprechend 90°) erreicht, den Wert 0 nach $\frac{2}{200} = \frac{1}{100}$ sec (entsprechend 180°). Nun wechselt die Stromkurve ins Negative.

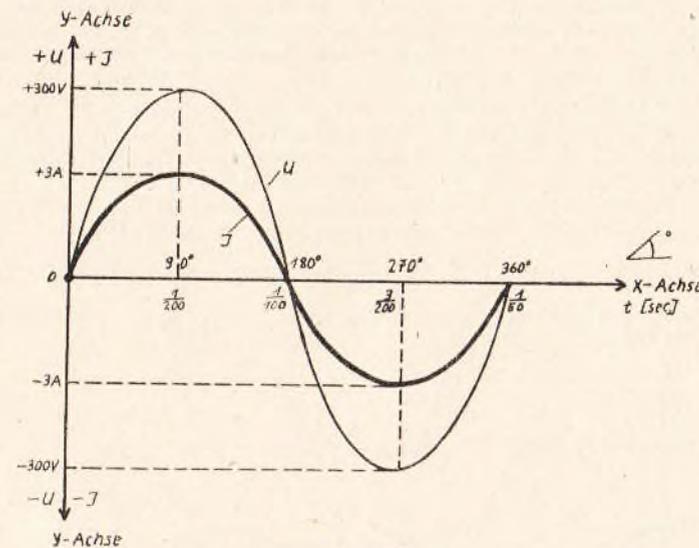


Abb. 23

Bei $\frac{3}{200}$ sec (entsprechend 270°) hat der Strom den negativen Höchstwert -3 A und nach weiteren $\frac{1}{200}$ sec wieder den Wert 0 angenommen. Nun tragen wir die

Spannungskurve ein (dünne Linie). Im Punkt 0 hat die Spannung U auch den Wert 0, bei 90° den Wert $+300$ V, bei 180° den Wert 0, bei 270° den Wert -300 V und bei 360° den Wert 0. Strom und Spannung sind hier – wie man sagt – **in Phase**, weil sie den gleichen zeitlichen Ablauf haben und die Null- sowie die Höchstwerte im gleichen Winkel und zum gleichen Zeitpunkt zusammenfallen.

Strom und Spannung sind in Phase, wenn sich im Wechselstromkreis lediglich ein rein Ohmscher Widerstand befindet.

Schalten wir eine Kapazität oder Induktivität in den Wechselstromkreis, so können wir durch geeignete Mittel (z. B. Kathodenstrahloszillographen) feststellen, daß sich die Strom- und die Spannungskurve gegeneinander **verschoben** haben. Diese Fälle wollen wir nun betrachten und uns überlegen, wie diese **Phasenverschiebung** zustande kommt.

Aus den Ausführungen über das Verhalten einer Induktivität als auch einer Kapazität in Wechselstromkreisen können wir uns bereits diese Phasenverschiebung erklären.

Wir wollen des besseren Verständnisses halber zunächst die Phasenverschiebung als Folge des Vorhandenseins einer Kapazität in einem Wechselstromkreis behandeln. In Band Ib, Abschnitt VII, haben wir gesehen, daß ein Kondensator im ersten Augenblick des Ladens sich so verhält, als ob er in dem Stromkreis gar nicht vorhanden sei. Mit zunehmender Elektrizitätsmenge Q auf seinen Belägen nimmt er eine immer höhere Gegenspannung an, bis zuletzt die Gegenspannung gleich der angelegten Spannung ist und kein Elektronentransport mehr stattfinden kann. Es liegen also offensichtlich die **Stromwerte** zeitlich **vor** den Spannungswerten an den Belägen des Kondensators. Die Phase des Wechselstromes ist demnach der

Phase der Wechselspannung vorausgeilt. Es hat also eine **Verschiebung** der Stromphase gegenüber der Spannungsphase stattgefunden, d. h., daß Strom- und Spannungskurve zum gleichen Zeitpunkt **nicht** den gleichen Zustand haben.

Man hat festgestellt, daß eine **reine** Kapazität in einem Wechselstromkreis eine Verschiebung zwischen der Strom- und der Spannungsphase von 90° hervorruft. Eine solche Phasenverschiebung läßt sich nur – wie bereits erwähnt – mittels eines Kathodenstrahloszillographen einwandfrei feststellen und beobachten. Abb. 24 zeigt uns den Verlauf der Kurven bei einer Frequenz $f = 50$ Hz.

Der Strom I erreicht bei der Kondensatorladung in der Zeit 0 seinen Höchstwert $+3$ A (vgl. Band Ib, Ziffer 36). Wenn wir eine Frequenz von 50 Hz – wie in Abb. 23 – annehmen, so beträgt sein Wert nach $\frac{1}{200}$ sec (entsprechend 90°) Null Ampere.

Die Spannung $+U$ hat in dem Augenblick, in dem der Strom $+I$ seinen Höchstwert ($+3$ A) erreicht, den Wert 0.

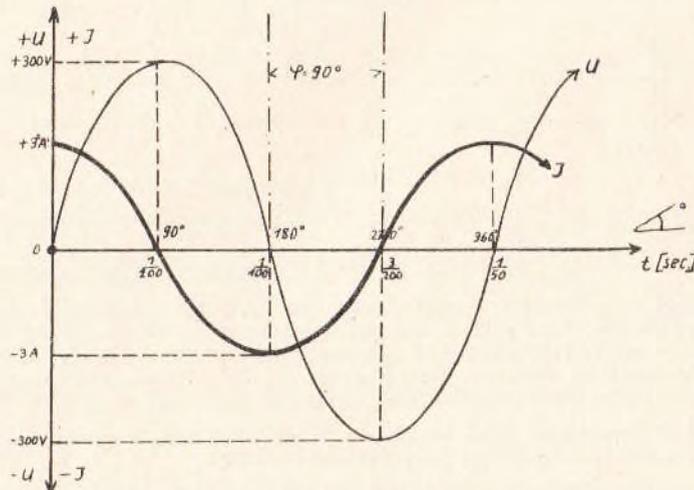


Abb. 24

Nach 90° oder $\frac{1}{200}$ sec erreicht U den positiven Höchstwert, z. B. $+300$ V. Der

Strom I hat jetzt aber den Wert 0. Wenn wir die I - und U -Kurven periodisch abtragen, ersehen wir, daß in jedem Augenblick der Strom I der Spannung U um 90° vorausleilt. Die Phasenverschiebung oder – anders ausgedrückt – der zeitliche

Ablauf zwischen Strom und Spannung beträgt hier $\frac{1}{200}$ sec entsprechend 90° (in Abb. 24 dargestellt durch zwei strichpunktierte Linien zwischen 180° und 270°).

Wir müssen uns also merken, daß bei einer Kapazität in einem Wechselstromkreis der Strom bis zu 90° der Spannung vorausleilen kann.

Als Lautgedächtnisregel merken wir uns unter besonderer Betonung des **O**:

Kondensator – Strom – vor.

Bei einer in einem Wechselstromkreis geschalteten Induktivität verhält sich die Phasenverschiebung umgekehrt wie bei einer Kapazität. Hier liegt als erstes die **Spannung** an der Induktivität (z. B. Drosselspule), und der Strom eilt der Spannung **nach**. Wir nehmen an, daß es sich hierbei um eine **reine** Induktivität handelt. Eine solche gibt es zwar praktisch nicht, weil jede Induktivität infolge des Widerstandes der Wicklungen auch einen Ohmschen Widerstand besitzt. In manchen Fällen kann aber dieser Ohmsche Widerstand so klein sein, daß er praktisch vernachlässigt werden kann. Abb. 25 soll diesen Fall erläutern.

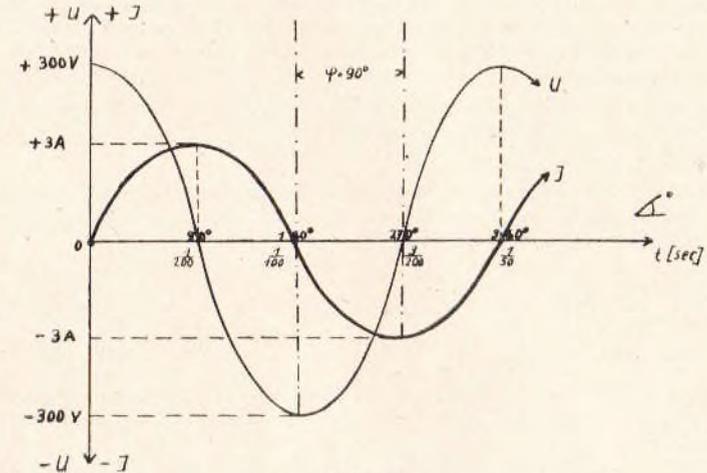


Abb. 25

Im Zeitpunkt Null hat die Spannung $+U$ den Betrag von $+300$ V, der Strom I den Wert 0. Wenn die Spannung U bei 90° ($\frac{1}{200}$ sec bei einer Frequenz von 50 Hz)

den Wert 0 erreicht hat, hat der Strom I seinen Höchstwert von $+3$ A. Auch hier stellen wir – wie in Abb. 24 – eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom fest, die 90° beträgt (dargestellt durch strichpunktierte Linien zwischen 180° und 270°). Der Unterschied zwischen den Abb. 24 und 25 besteht lediglich darin, daß in Abb. 24 der **Strom** der Spannung vorausleilt und in Abb. 25 die **Spannung** dem Strom.

Zusammenfassung:

1. Eine Kapazität und eine Induktivität in einem Wechselstromkreis verursachen eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.
2. Liegt eine **Kapazität** in einem Wechselstromkreis, so eilt der **Strom** der Spannung **vor**.
3. Liegt eine **Induktivität** in einem Wechselstromkreis, so eilt der **Strom** der Spannung **nach**.

(14) Der Phasenwinkel φ

In Ziffer 13 haben wir gesehen, daß eine **reine** Kapazität und eine **reine** Induktivität eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von 90° hervorrufen. Bei der Betrachtung der Abbildungen 24 und 25 wird uns vielleicht aufgefallen sein, daß zwischen den strichpunktierten Linien nicht nur 90° steht, sondern auch ein Zeichen, das den kleinen griechischen Buchstaben Phi (φ) darstellt. Dieses kleine φ darf nicht mit dem großen griechischen Phi (Φ) verwechselt werden, das bekanntlich das Formelzeichen für den magnetischen Kraftfluß ist (vgl. Band IIa). Das kleine griechische Phi (φ) ist das Formelzeichen für den sogenannten **Phasenwinkel**, auf den wir jetzt zu sprechen kommen. Der Phasenwinkel ist der Winkel, um den die Stromphase der Spannungsphase vor- oder nachgeht.

Wir wollen uns merken:

Liegt eine **reine** Kapazität oder Induktivität in einem Wechselstromkreis (ein Fall, der praktisch kaum vorkommt), so beträgt der Phasenwinkel $\varphi = 90^\circ$.

Wie sieht es nun in der Praxis aus?

Wie bereits bei der Behandlung des Scheinwiderstandes besprochen, liegt eine Induktivität als auch eine Kapazität in den FM-Schaltungen meist mit einem Ohmschen Widerstand in Reihe (siehe Abb. 26a und b).

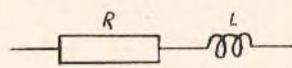


Abb. 26a

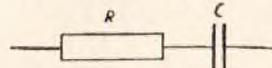


Abb. 26b

In Abb. 26a kann R der Widerstand der Wicklung der Induktivität L oder ein weiterer vorgeschalteter Widerstand sein. In Abb. 26b ist R fast immer ein Vorwiderstand.

In den Abbildungen 19 bis 22 haben wir diesen Phasenwinkel φ bereits dargestellt. Er ist der Winkel, der aus dem Wirkwiderstand R_w und dem Scheinwiderstand R_s als Schenkel gebildet wird und dessen Scheitelpunkt mit dem Punkt Null des Achsenkreuzes zusammenfällt. φ ist also klein, wenn der Blindwiderstand ωL oder $\frac{1}{\omega C}$ als Gegenkathete zum Winkel φ klein ist und groß, wenn ωL oder $\frac{1}{\omega C}$ groß ist.

Der Phasenwinkel φ ist aber nicht nur abhängig von der Größe des Blindwiderstandes, sondern auch von der Größe des Wirkwiderstandes R_w .

Wir betrachten die Abbildungen 27a - d, in denen wir nur den **induktiven** Blindwiderstand ωL berücksichtigt haben. Das gleiche gilt selbstverständlich auch für den kapazitiven Blindwiderstand.

Wir betrachten die Abbildungen 27a - d, in denen wir nur den **induktiven** Blindwiderstand ωL berücksichtigt haben. Das gleiche gilt selbstverständlich auch für den kapazitiven Blindwiderstand.

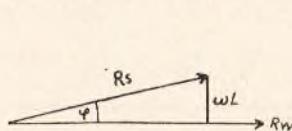


Abb. 27a

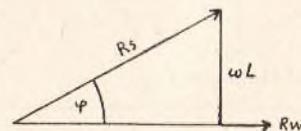


Abb. 27b

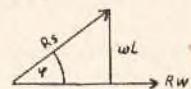


Abb. 27c

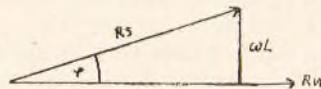


Abb. 27d

In den Abbildungen 27a und b hat R_w den gleichen Wert und ωL je einen unterschiedlichen. In Abb. 27a ist ωL klein, demzufolge ist der Winkel φ auch klein. In Abb. 27b ist ωL gewachsen, φ ist größer geworden.

In den Abbildungen 27c und d ist der Wert von ωL konstant, jedoch verändern wir den Wert von R_w . Ist R_w klein, so ist φ groß, ist R_w groß, so ist φ klein. Die Abbildungen 27a - d können also bezüglich des Verhaltens des Winkels φ mit dem Inhalt der Ziffern 6 bis 8 verglichen werden, wobei wir für α eben φ setzen.

Wie verlaufen Strom- und Spannungskurve, wenn der Phasenwinkel $\varphi = 45^\circ$ beträgt?*) Hierzu betrachten wir Abb. 28.

Wir nehmen hierbei an, daß der Strom I der Spannung U um 45° voreilt. Im Zeitpunkt Null Sekunden hat der Strom I den angenommenen Höchstwert von $+3\text{ A}$, U hat aber nicht mehr den Wert Null wie bei einem Phasenwinkel von 90° , sondern einen Wert, der zwischen 0 und dem Höchstwert liegt, hier etwa $+240\text{ V}$. Bei 45° sinkt der Strom auf $2,4\text{ A}$. Die Spannung U erreicht hier ihren Höchstwert von (beispielsweise) $+300\text{ V}$. Während der Strom I bei 90° den Wert Null hat, haben

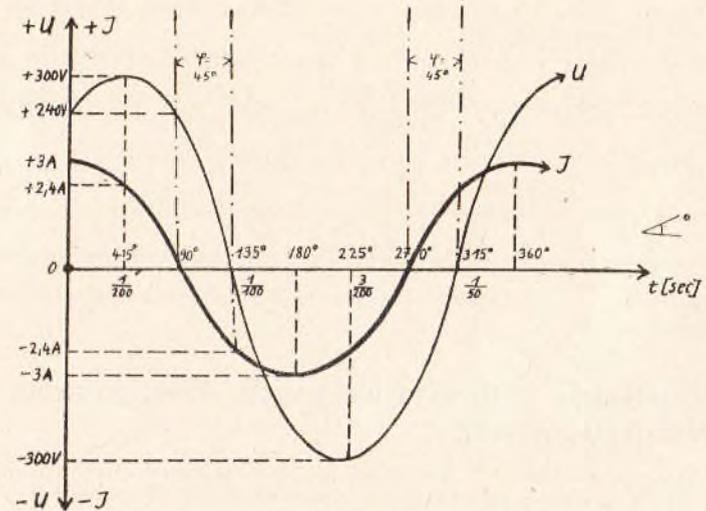


Abb. 28

wir noch eine Spannung von ebenfalls $+240\text{ V}$. Die Spannung U hat bei 135° den Wert Null, der Strom jedoch den Wert $-2,4\text{ A}$. Den Phasenwinkel φ von 45° können wir am besten zwischen dem Winkel 90° , wo der **Strom** I den Wert Null erreicht und dem Winkel 135° , wo die **Spannung** U den Wert Null hat, darstellen. Dasselbe gilt zwischen 270° , wo ebenfalls der Strom I den Wert Null hat, und 315° , wo die Spannungsphase durch den Nullpunkt geht.

Den Phasenwinkel φ errechnen wir am einfachsten aus seinem Tangens, d. h. aus dem Verhältnis der Gegenkathete ωL oder $\frac{1}{\omega C}$ zu der Ankathete R_w (vgl. Ziffer 9).

*) Wie das zu erreichen ist, wäre später (Ziffer 22) nachzulesen.

Es ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R_w} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C} : R_w = -\frac{1}{\omega C \times R_w}$$

Aus diesem Zahlenwert, der zwischen 0 und ∞ liegt, ist die Größe des Winkels φ nach Ziffer 9 leicht zu ermitteln.

Der Zahlenwert von $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C \times R_w}$ ist deshalb negativ, weil φ im Koordinatensystem im IV. Quadranten liegt (vgl. Abb. 17 und Text hierzu). Kapazitive Belastung bei Hintereinanderschaltung von R und C bzw. R und L bedeutet grundsätzlich einen negativen Zahlenwert für φ .

Zusammenfassung:

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wird ausgedrückt durch den Phasenwinkel φ .
 Der Phasenwinkel φ wird errechnet aus dem Verhältnis des induktiven oder kapazitiven Blindwiderstandes (ωL oder $\frac{1}{\omega C}$) zu dem Wirkwiderstand R_w .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R_w} \quad (\text{induktive Belastung})$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C} : R_w = -\frac{1}{\omega C \times R_w} \quad (\text{kapazitive Belastung})$$

Welche Bedeutung der Phasenwinkel φ hat, wird aus den späteren Ausführungen hervorgehen.

(15) Mittelwerte (Effektivwerte) von Wechselstrom und Wechselspannung

Wenn wir die Kurve eines sinusförmigen Wechselstromes betrachten, z. B. die Kurve Abb. 29, so sehen wir, daß die Stromstärke zwischen dem Wert 0 und dem positiven oder negativen Höchstwert in einem bestimmten zeitlichen Ablauf, der von der Frequenz f abhängig ist, ansteigt oder abfällt. Man nennt jeden auftretenden Wert des Wechselstromes oder der Wechselspannungen den **Augenblickswert** oder **Momentanwert**. Sie werden gekennzeichnet durch ein kleines lateinisches i oder u .

In Abb. 29 ist eine Periode eines Wechselstromes der Frequenz $f = 50$ Hz dargestellt. Zum Zeitpunkt 0 sec hat der Strom den Wert 0 A, nach $\frac{1}{200}$ sec den positiven Höchstwert von + 3 A, nach einer weiteren $\frac{1}{200}$ sec, also bei $\frac{1}{100}$ sec, wiederum den Wert 0 usw. Zwischen dem Zeitpunkt 0 und $\frac{1}{200}$ sec, zwischen $\frac{1}{200}$ und $\frac{1}{100}$ sec usw. liegen die Augenblickswerte des Wechselstromes.

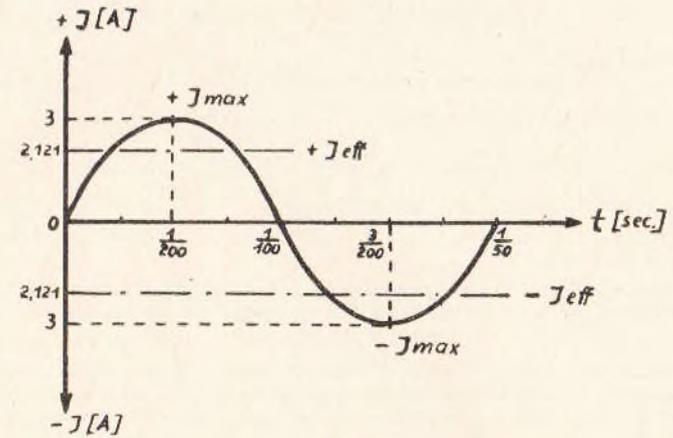


Abb. 29

Wenn wir eine Glühlampe in diesen Wechselstromkreis schalten und im **Zeitlupentempo** das Verhalten des Glühfadens betrachten, so können wir sehen, daß der Glühfaden unserer Lampe (der allerdings von besonderer Art sein müßte) im Zeitpunkt 0 dunkel ist und dann allmählich immer mehr bis zu einer gewissen Grenze (hier 3 A, entsprechend $t = \frac{1}{200}$ sec) heller wird. Von diesem Grenzpunkt ab wird die Lichtstärke des Glühfadens geringer werden. Zuletzt (bei $\frac{1}{100}$ sec, entsprechend 0 A) ist keine Lichterscheinung mehr wahrnehmbar.

Infolge des ständigen Ansteigens und Abfallens der Stromstärke flackert die Lampe, was wir allerdings normalerweise infolge der Trägheit unseres Sehvermögens gegenüber schnellen Bewegungs- und Lichtstärkeänderungen nicht wahrnehmen können. Nun stellt der Glühfaden einer Glühlampe einen Ohmschen Widerstand dar, über den ein Strom eine Wärmeentwicklung ($0,24 \times I^2 \times R \times t$) hervorruft. Um diese Wärmeentwicklung bei Wechselstrom angeben zu können, vergleicht man den **Wechselstrom** mit einem **Gleichstrom**, der an einem **gleich** großen Ohmschen Widerstand in **derselben Zeit** die **gleiche** Wärmemenge entwickelt. Diesen Gleichstromwert, der in Abb. 29 2,121 A beträgt (dargestellt durch die strichpunktierten Linien), nennt man den **Effektivwert** (I_{eff}) **des Wechselstromes**.

Bezeichnen wir den Höchstwert eines Wechselstromes mit I_{max} (Abkürzung für den Höchst- oder Maximalwert eines Wechselstromes), so errechnet sich sein Effektivwert I_{eff} zu:

$$I_{eff} = I_{max} \times 0,707$$

Aus dem Effektivwert I_{eff} läßt sich der Höchstwert eines Wechselstromes errechnen zu:

$$I_{max} = I_{eff} \times \frac{1}{0,707}$$

$$= I_{eff} \times 1,4142$$

Die Zahl 1,4142 ist die Wurzel aus 2 ($\sqrt{2}$), so daß man schreiben kann:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \text{ und}$$

$$I_{\text{max}} = I_{\text{eff}} \times \sqrt{2}$$

In unserem Beispiel Abb. 29 beträgt I_{max} 3 A. I_{eff} errechnet sich zu:

$$I_{\text{eff}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1,4142} = 3 \times 0,707 = 2,121 \text{ A}$$

(dargestellt durch die strich-punktierten Linien).

Nehmen wir $I_{\text{eff}} = 2,121 \text{ A}$ mit $\sqrt{2} = 1,4142$ mal, so erhalten wir recht genau den Wert von $I_{\text{max}} = 3,0 \text{ A}$.

Da das gleiche auch für Wechselspannungen gilt, ist der Höchstwert unserer Netzwechselspannung, die im allgemeinen 220 V beträgt:

$$U_{\text{max}} = U_{\text{eff}} \times \sqrt{2} = U_{\text{eff}} \times 1,4142 = 220 \times 1,4142 = \text{rund } 310 \text{ V.}$$

Hier finden wir das bestätigt, was wir bereits im Band Ib (Kondensatoren an Wechselspannungen) angedeutet haben, nämlich, daß die an einem Kondensator herrschende Spitzenspannung wesentlich höher sein kann als die angegebene Betriebsspannung.

Wie können wir diesen Gleichstromwert, der gleichzeitig der Effektivwert des Wechselstromes ist, messen?

Wir benutzen hierzu ein Hitzdrahtamperemeter, das im Band XI geschildert ist. Der Hitzdraht dieses Strommessers ist ein Ohmscher Widerstand, der vom elektrischen Strom durchflossen wird. Je nach der Stärke des Stromes wird der Draht mehr oder weniger erwärmt und dehnt sich entsprechend mehr oder weniger aus. Diese Dehnung wird auf einen Zeiger übertragen, der auf einer Skala die Stromstärke in Ampere anzeigt. Fließt durch den Hitzdraht ein Gleichstrom von 2,121 A (vgl. Abb. 29), so wird sich der Zeiger auf diesen Wert einstellen. Schicken wir durch dieses Instrument einen Wechselstrom von $I_{\text{max}} = 3 \text{ A}$, so wird der Zeiger gleichfalls auf 2,121 A ausschlagen. Wir haben den **Effektivwert** dieses Wechselstromes gemessen, weil er die gleiche Wärmemenge entwickelt hat wie der Gleichstrom. Das Meßergebnis stimmt demnach mit unserer Rechnung überein.

Wenn wir in Zukunft von Wechselspannungen und Wechselströmen sprechen, so meinen wir – wenn nicht ausdrücklich anders gesagt – die **Effektivwerte**.

Zusammenfassung:

1. Bei Wechselstrom unterscheiden wir zwischen dem Höchstwert I_{max} und dem Effektivwert I_{eff} .
2. Die Effektivstromstärke ist die Stromstärke, die über einem Ohmschen Widerstand die gleiche Wärmeentwicklung hervorruft wie ein gleich starker Gleichstrom (Hitzdrahtamperemeter!).
3. Es sind:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{I_{\text{max}}}{1,4142} = I_{\text{max}} \times 0,707$$

$$I_{\text{max}} = I_{\text{eff}} \times \sqrt{2} = I_{\text{max}} \times 1,4142$$

4. Für Wechselspannungen gilt dasselbe:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{U_{\text{max}}}{1,4142} = U_{\text{max}} \times 0,707$$

$$U_{\text{max}} = U_{\text{eff}} \times \sqrt{2} = U_{\text{eff}} \times 1,4142$$

(16) Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom

Das Ohmsche Gesetz gilt nicht nur für Gleichstrom, sondern auch für Wechselstrom, wenn wir für U und I die **Augenblickswerte** i und u einsetzen. Es lautet:

$$i = \frac{u}{R_s}$$

wobei R_s induktiven oder kapazitiven Charakter haben kann. Im ersten Falle setzen wir für R_s gem. Ziffer 11 $\sqrt{R_w^2 + (\omega L)^2}$, und wir erhalten

$$i = \frac{u}{\sqrt{R_w^2 + (\omega L)^2}}$$

Im zweiten Falle setzen wir für R_s gem. Ziffer 12 $\sqrt{R_w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ und erhalten

$$i = \frac{u}{\sqrt{R_w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Da auch die Maximalwerte Momentanwerte sind, ist auch

$$I_{\text{max}} = \frac{U_{\text{max}}}{R_s}$$

Dividieren wir die Gleichung durch $\sqrt{2}$, so erhalten wir gem. Ziffer 15 die Effektivwerte von Strom und Spannung. Es wird aus

$$\frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{R_s} :$$

$$I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \times \frac{1}{R_s} = \frac{U_{\text{eff}}}{R_s}$$

(17) Die Zeigerdarstellung

Als sehr anschauliches Mittel, die Strom- und Spannungsverhältnisse im Wechselstromkreis in Abhängigkeit von der Zeit, unter anderem auch die Phasenverschiebung, aufzuzeichnen, dient die **Zeigerdarstellung**. Wir stellen uns eine Stoppuhr vor, deren Zeiger mit gleichbleibender Geschwindigkeit jeweils innerhalb von 30 sec

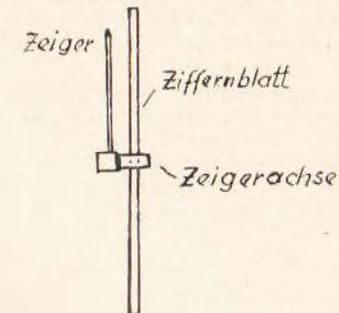


Abb. 30

eine Umdrehung vollführt. Zeiger, Zeigerachse und Zifferblatt der Uhr wollen wir im Schnitt betrachten (Abb. 30), wobei wir den Abstand des Zeigers vom Zifferblatt übertrieben groß darstellen. Der Zeiger möge im ersten Augenblick der Betrachtung wie in Abb. 30 dargestellt stehen; d. h., wir sehen ihn in seiner vollen Länge. Dreht sich der Zeiger, so schrumpft er in unserem Blickfeld scheinbar zusammen, bis wir bei einer Viertelumdrehung nichts mehr von ihm – bis auf seine punktförmige Schnittfläche – wahrnehmen. Bei weiterem Drehen wächst die Länge des Zeigers scheinbar, bis er nach $\frac{1}{2}$ Umdrehung wieder in voller Größe, diesmal aber nach unten zeigend, erscheint. Bei einer weiteren Viertelumdrehung schrumpft er wieder scheinbar bis zu einem Punkt zusammen, um dann nach der letzten Viertelumdrehung wieder in voller Länge (wie in Abb. 30) sichtbar zu werden. Abb. 31 zeigt die Veränderung der scheinbaren Zeigerlänge als Schema; sie ist uns nicht fremd.

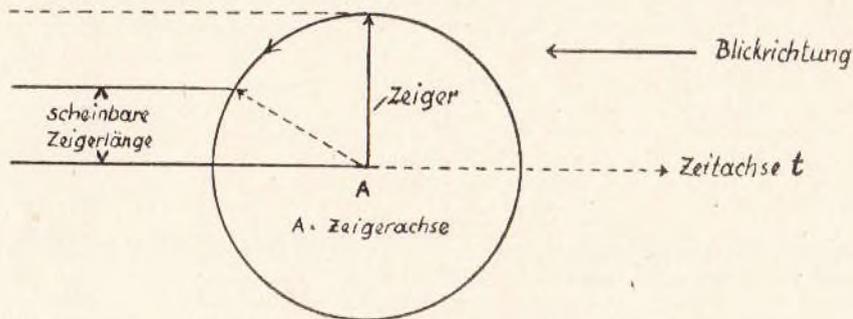


Abb. 31

In Ziffer 10 und Abb. 18 ist die Entstehung einer Sinuskurve besprochen worden. Die wirkliche Zeigerlänge der Abb. 31 entspricht den Radien des Einheitskreises Abb. 18, die scheinbare Zeigerlänge dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, also seinem Sinus. Ein Unterschied besteht jedoch zwischen der Abb. 18 und der Abb. 31; während wir in Abb. 18 auf der durch den Mittelpunkt des Einheitskreises führenden waagerechten Achse das Grad- und Bogenmaß abgetragen haben, tragen wir auf der waagerechten Linie, die durch den Mittelpunkt der Zeigerachse Abb. 31 führt, die Zeit t ab, die der Zeiger für jeweils einen Umlauf benötigt. Dreht sich der Zeiger in 1 sec einmal, so entspricht die Strecke 0 bis 360° bzw. 2π der Zeit t von 1 sec. Dreht sich der Zeiger 50mal in 1 sec, so erhalten wir auf der gleichen Strecke eine fortlaufende Sinuskurve mit 50 positiven und 50 negativen Halbwellen, d. h. 50 Perioden. Die Anzahl der Umläufe des Zeigers je sec ist in der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ausgedrückt (siehe Ziffer 2).

Um einen bestimmten Augenblickswert der Wechselspannung oder des Wechselstromes darzustellen, müssen wir den Zeiger in der dem Augenblickswert entsprechenden Lage zeichnen. Abb. 32 stellt einen solchen Fall dar. Die Drehrichtung des Zeigers wird aus einem Kreisbogen mit Pfeil ersichtlich, die Frequenz aus der neben dem Pfeil geschriebenen Zahl, in Abb. 32 also $f = 50 \text{ Hz}$.

Der Augenblickswert der Wechselspannung oder des Wechselstromes errechnet sich zu

$$U_{\text{max}} \text{ bzw. } I_{\text{max}} \times \sin \omega t.$$

Die in Ziffer 13 besprochene Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung läßt sich sehr anschaulich durch zwei Zeiger darstellen. Ein Zeiger stellt die Spannung, der zweite den Strom dar. Beide Zeiger laufen mit der gleichen Geschwindig-

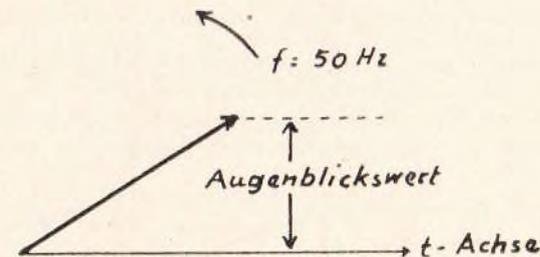


Abb. 32

keit auf derselben Achse um, weil die Frequenz der Spannung gleich der des Stromes ist. Die Höhe der Spannung und die Stärke des Stromes werden durch Zeiger verschiedener Länge dargestellt.

Wir wollen die Abb. 23, die die Phasengleichheit zwischen Strom und Spannung zeigt, auf die Zeigerdarstellung übertragen (Abb. 33). Hier fällt der Spannungszeiger U mit dem Stromzeiger I zusammen; beide verlaufen in gleicher Richtung.

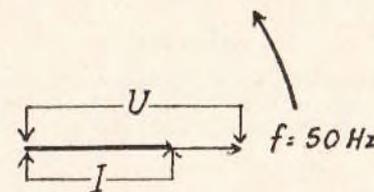


Abb. 33

Die Abb. 24 zeigt die Strom- und Spannungskurve bei einer Phasenverschiebung von 90° . In der Zeigerdarstellung sieht das Bild wie folgt aus (Abb. 34). Das **Vorzeichen** der Spannung um 90° erkennt man daran, daß der Spannungszeiger U in der Drehrichtung senkrecht auf dem Stromzeiger I steht. Der Phasenwinkel φ wird aus dem Spannungszeiger als dem einen Schenkel und dem Stromzeiger als

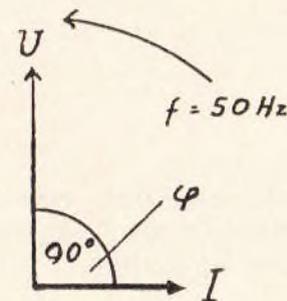


Abb. 34

dem anderen Schenkel gebildet. Eilt der **Strom** um 90° der Spannung vor, so erhalten wir das Bild Abb. 35.

Aus einer solchen Zeichnung läßt sich auf Grund der Zeigerlage sofort erkennen, ob der Wechselstromkreis induktiv oder kapazitiv belastet ist.

Die Abb. 28 ($\varphi = 45^\circ$) läßt sich gem. Abb. 36 durch Zeiger darstellen.

In Abb. 36a eilt die Spannung um 45° dem Strom, in Abb. 36b der Strom der Spannung um 45° vor.

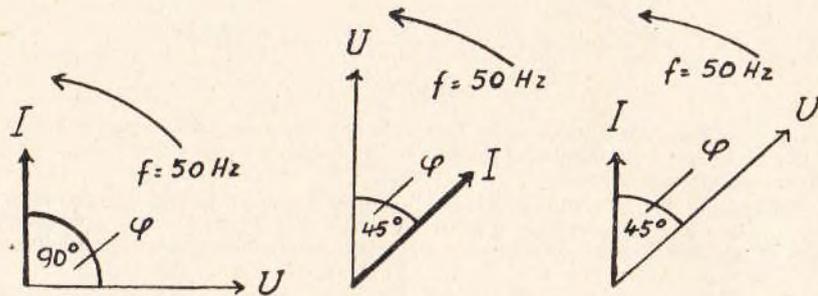


Abb. 35

Abb. 36a

Abb. 36b

So läßt sich auf einfachste Weise jeder Phasenwinkel darstellen. Darüber hinaus erkennt man an der Zeigerlage, ob der Stromkreis induktiv oder kapazitiv belastet ist. In Abb. 37a und b sind die beiden Möglichkeiten bei $\varphi = 30^\circ$ dargestellt.

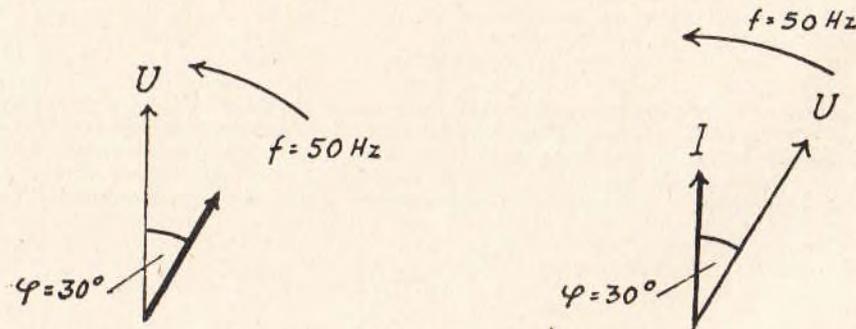


Abb. 37a

Abb. 37b

(18) Die Hintereinanderschaltung von Ohmschem Widerstand R und Induktivität L sowie von Ohmschem Widerstand R und Kapazität C

In Abb. 38 ist die Hintereinanderschaltung von Ohmschem Widerstand R und Induktivität L dargestellt. R ist der Wirkwiderstand, den wir mit R_w bezeichnet haben, L der Blindwiderstand ωL im Wechselstromkreis. Unter der Wirkung einer

Wechselspannung U fließt über diese Anordnung ein Wechselstrom, den wir in Zukunft mit I_{ges} (I gesamt) bezeichnen wollen. Dieser Strom I_{ges} erzeugt einen Spannungsabfall $I_{ges} \times R_w = U_{Rw}$ über dem Wirkwiderstand R_w und einen Spannungsabfall $I_{ges} \times R_b = I_{ges} \times \omega L = U_{Rb}$ über L .

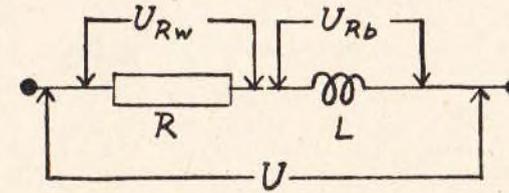


Abb. 38

Diese Spannungsabfälle lassen sich in dem sogenannten „Spannungsdreieck“ zeichnerisch darstellen (Abb. 39).

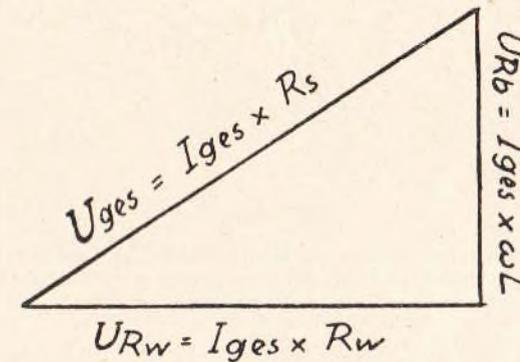


Abb. 39

Mit Hilfe der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung (Abb. 40a) und der Zeigerdarstellung (Abb. 40b) läßt sich das Entstehen des Spannungsdreieckes Abb. 39 leicht erklären. In Abb. 40a erkennen wir die Kurve des Gesamtstromes I_{ges} und, phasengleich mit ihr, die Spannungskurve U_{Rw} . Sie stellt die Wechselspannung dar, die über dem Wirkwiderstand herrscht. Diese Wechselspannung errechnet sich zu:

$$U_{Rw} = I_{ges} \times R_w.$$

Strom und Spannung sind bei einem Ohmschen Widerstand im Wechselstromkreis bekanntlich phasengleich.

Über dem Blindwiderstand ωL tritt eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung um 90° auf, wobei die Spannung U_{Rw} dem Strom I_{ges} um 90° voreilt. Es ist

$$U_{Rb} = I_{ges} \times \omega L$$

In der Zeigerdarstellung Abb. 40b kommt die Phasengleichheit zwischen I_{ges} und U_{Rw} und das Voreilen der Spannung um 90° wie in Ziffer 17 besprochen zum

Ausdruck. Die über der Gesamtanordnung Abb. 39 herrschende Spannung $U = I_{ges} \times R_s$, die man Gesamtspannung oder auch Scheinspannung nennt, läßt sich zeichnerisch gem. Ziffer 4 ermitteln: von den Endwerten von U_{Rw} und U_{Rb}

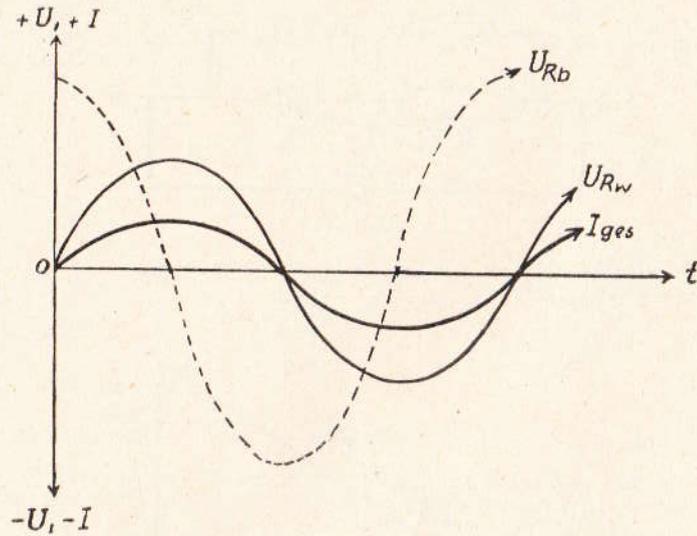


Abb. 40a

ziehen wir zwei senkrecht zueinander stehende Hilfslinien. Den Schnittpunkt dieser beiden Hilfslinien verbinden wir mit dem Ausgangs- oder Nullpunkt der Achsen. Wir erhalten damit die Diagonale eines Rechteckes, welches das Rechteck in zwei

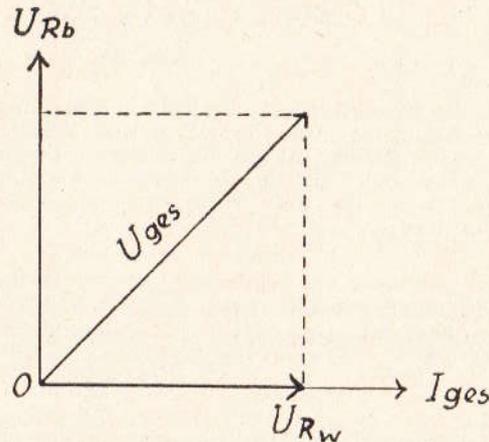


Abb. 40b

rechtwinklige Dreiecke teilt (siehe Ziffer 4). Das untere Dreieck entspricht dem Spannungsdreieck Abb. 39. Um die Gesamtspannung zu ermitteln, wenden wir die geometrische Addition nach dem Lehrsatz des Pythagoras an und erhalten

$$U_{ges} = \sqrt{U_{Rw}^2 + U_{Rb}^2} \\ = \sqrt{(I_{ges} \times R_w)^2 + (I_{ges} \times \omega L)^2}$$

Liegt eine Kapazität C mit einem Ohmschen Widerstand in Reihe, so erhalten wir gleichfalls zwei Spannungsabfälle, die sich geometrisch zu der über der Anordnung herrschenden Gesamtspannung addieren. Es ist auch hier

$$U_{ges} = \sqrt{U_{Rw}^2 + U_{Rb}^2} \\ = \sqrt{(I_{ges} \times R_w)^2 + (I_{ges} \times \frac{1}{\omega C})^2}$$

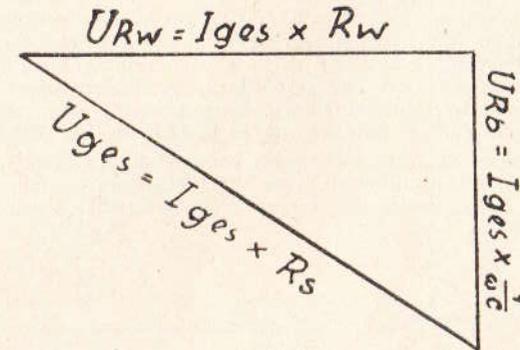


Abb. 41

Da der kapazitive Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ gem. Ziffer 13 von der R_w -Achse nach unten abgetragen wird, erhält das Spannungsdreieck die Form der Abb. 41.

Teilen wir die Strecken der Abb. 39 bzw. 41 $I_{ges} \times R_w$, $I_{ges} \times R_b$ (wobei $R_b = \omega L$ bzw. $\frac{1}{\omega C}$ ist) und $I_{ges} \times R_s$ durch I_{ges} , dann erhalten wir das Widerstandsdreieck, wie es in Ziffer 11 und 12 behandelt worden ist.

(19) Die Wechselstromleistung

In den Bänden Ia bis IIa haben wir in mehreren Fällen die elektrische Leistung im Gleichstromkreis behandelt und ihre Berechnung festgelegt zu:

$$N = U \times I \text{ oder} \\ N = I^2 \times R$$

Im Wechselstromkreis ist die Ermittlung der Leistung nicht so einfach, weil Spannung und Strom nicht nur periodisch ihre Werte, sondern auch ihre Richtung ändern. Darüber hinaus treten durch Induktivitäten oder Kapazitäten im Stromkreis Phasenverschiebungen auf, die gleichfalls die Leistung beeinflussen.

Mit dem Wort „Leistung“ ohne jeden Zusatz kommen wir bei der Wechselstromleistung nicht mehr aus. Im Gleichstromkreis ist der Begriff „Leistung“ eindeutig: sie wird z. B. an einen Ohmschen Widerstand abgegeben, der aus einem Verbraucher mit der Leitung zu ihm besteht. An diesem Widerstand werden Wirkungen erzielt, z. B. das Erwärmen einer Heizplatte, das Erwärmen des Glühfadens einer elektrischen Birne.

Da ja auch der Wechselstrom die gleichen Wirkungen an einem rein Ohmschen Widerstand verursacht (siehe Ziffer 15), nennt man die Leistung, die an einen Ohmschen Widerstand abgegeben wird, **Wirkleistung** (N_w) und mißt sie wie bei Gleichstrom in Watt.

Befindet sich in dem Wechselstromkreis lediglich ein Ohmscher Widerstand, so daß Strom und Spannung gem. Abb. 23 in Phase sind, errechnet sich die Wirkleistung N_w zu

$$N_w = U_{eff} \times I_{eff} \text{ [Watt]}$$

Sobald jedoch eine Induktivität oder Kapazität im Wechselstromkreis vorhanden ist, wird der Wert der Wirkleistung durch die eintretende Phasenverschiebung um den Betrag eines Faktors, der kleiner als 1 ist, vermindert. Dieser Faktor, auf den unten näher eingegangen wird, ist der Cosinus des Phasenwinkels φ ($\cos \varphi$). An den induktiven oder kapazitiven Blindwiderstand wird sog. „Blindleistung“ abgegeben. Die Einheit dieser Blindleistung ist das **Blindwatt (BlW)**.

Daß es eine Blindleistung tatsächlich gibt, können wir an Hand eines einfachen Versuches beweisen. Wir schalten an unser Wechselstromnetz einen Wechselstrommesser mit einem Kondensator und einem Elektrizitätszähler gem. Abb. 42 über einen Schalter in Reihe.

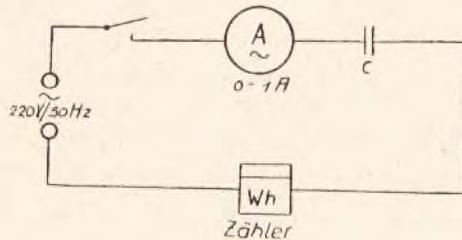


Abb. 42

Schließen wir den Schalter, so zeigt der Strommesser an, daß gem. Band Ib, Ziffer 41, bei einer angelegten Spannung U ein Strom fließt, dessen Stärke von der Höhe der angelegten Spannung U , der Größe der Kapazität C und der Höhe der Frequenz f ,

d. h. von dem Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ des Kondensators abhängig ist. Wenn wir jetzt

den Elektrizitätszähler betrachten, so werden wir feststellen, daß er überhaupt nicht anspricht, obwohl der Strommesser einen u. U. ziemlich starken Strom anzeigt. Wir haben es hier offensichtlich mit Blindleistung, also wattloser Leistung, zu tun. Die elektrische Energie pendelt zwischen den Belegungen des Kondensators hin und her. Sie wird nicht verbraucht und kann demzufolge den Zähler nicht zum Ansprechen bringen. Bei einer **reinen** Induktivität liegen die Verhältnisse ähnlich. Ein Energie- oder Leistungsverbrauch tritt **nur** über Ohmschen oder Wirkwiderständen auf.

Wir rufen uns den Inhalt der Ziffer 11 und 12 ins Gedächtnis zurück, in denen wir festgestellt haben, daß wir in einem mit Induktivität oder Kapazität belasteten Stromkreis zwischen dem Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand zu unterscheiden haben. Da, wie wir festgestellt haben, Wirkleistung an einen Wirkwiderstand abgegeben wird, ein Blindwiderstand Blindleistung aufnimmt, so liegt es auch nahe, daß an den Scheinwiderstand als geometrische Summe aus Wirk- und Blindwiderstand eine Gesamt- oder Scheinleistung abgegeben wird. Dieses ist tatsächlich der Fall. Wirk-, Blind- und Scheinleistung können wir gem. Ziffer 4 zu einem Leistungsdreieck zusammenfassen, wie das in Abb. 43 dargestellt ist. Die Form dieses Dreiecks ist wie bei den Widerstandsdreiecken in starkem Maße abhängig von den Größen N_w und N_b . Zum Vergleich können wir die Abb. 27 a - d heranziehen. Der in diesen Abbildungen angedeutete Phasenwinkel φ erhält im Leistungsdreieck eine ganz besondere Bedeutung.

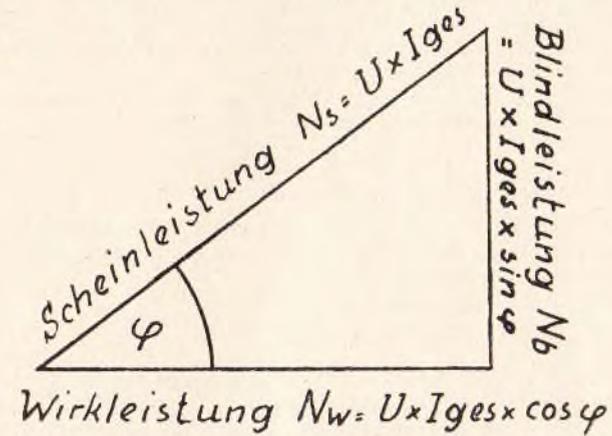


Abb. 43

In Abb. 43 stellt die Ankathete des Phasenwinkels φ den Betrag der Wirkleistung, die Gegenkathete den Betrag der Blindleistung und die Hypotenuse den Betrag der Scheinleistung dar. φ ist klein, wenn N_b klein ist, und groß, wenn N_b groß ist. Darüber hinaus spielt, wie bei der Besprechung des Scheinwiderstandes, die Länge der Ankathete eine Rolle.

Das Verhältnis Ankathete zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gem. Ziffer 8 der Cosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck. In Abb. 43 ist das Verhältnis $N_w : N_s$ der Cosinus des Phasenwinkels φ , mit dem wir es im weiteren Verlauf zu tun haben.

Der Cosinus φ wird Leistungsfaktor genannt, weil er auf die Wirkleistung entsprechend seiner Größe besonderen Einfluß hat.

Aus der Ziffer 8 wissen wir, daß der Cosinus eines Winkels gleich 1 ist, wenn die Größe des Winkels 0° beträgt, und daß er mit zunehmender Winkelgröße immer kleiner wird, bis zuletzt bei einem Winkel von 90° sein Cosinus 0 beträgt.

Diese Überlegung ist für die Betrachtung der Wirkleistung von grundsätzlicher Bedeutung. Wenn wir nämlich das Produkt aus $U \times I$ mal der Größe des Cosinus des Phasenwinkels φ nehmen, so erhalten wir die jeweilige Wirkleistung N_w . Es ist:

$$N_w = U \times I_{ges} \times \cos \varphi \text{ [W]}$$

wobei U und I_{ges} stets die **Effektivwerte** darstellen (siehe Ziffer 15).

Setzen wir in diese Formel $\cos \varphi = 1$ (keine Phasenverschiebung), so ist die Wirkleistung N_w gleich der Scheinleistung N_s .

Unter der Scheinleistung verstehen wir die Leistung, die an den gesamten oder Scheinwiderstand der Anordnung abgegeben wird.

$$N_s = U \times I_{ges} \text{ [VA]}$$

$$\text{oder } N_s = I_{ges}^2 \times R_s \text{ [VA]}$$

Die Einheit der Scheinleistung N_s ist das Volt-Ampere, abgekürzt VA, zum Unterschied von der Einheit der Wirkleistung N_w , die das Watt ist.

Man wähle die Einheit Volt-Ampere, um darzulegen, daß z. B. durch die Wicklung eines Motors stets der **Gesamtstrom** I_{ges} fließt, während die tatsächlich aufgenommene Leistung, also die Wirkleistung, infolge der auftretenden Phasenverschiebung durch die Induktivität der Motorwicklungen kleiner als das Produkt aus $U \times I_{ges}$ ist, nämlich um den Wert des $\cos \varphi$.

Diese Scheinleistung N_s setzt sich gem. Abb. 43 aus einem Wirkleistungsanteil N_w und einem Blindleistungsanteil N_b zusammen. Es ist:

$$N_s = \sqrt{N_w^2 + N_b^2} \text{ [VA]}$$

Zum Verständnis wollen wir einige Beispiele durchrechnen.

Frage 1: In welchem Falle ist die Wirkleistung gleich der Scheinleistung?

Antwort: Wenn Cosinus φ gleich 1 ist; d. h., wenn nur ein Ohmscher oder Wirkwiderstand im Stromkreis vorhanden ist.

Beweis: $U = 220 \text{ V}$, $R_w = 10 \text{ Ohm}$, $R_b = 0 \text{ Ohm}$.

Bei $R_b = 0 \text{ Ohm}$ ist $\varphi = 0^\circ$, Cosinus $\varphi = 1$. Es ist:

$$N_w = N_s = 220 \times 10 \times 1 = 2200 \text{ W.}$$

Folgerung: Befindet sich im Wechselstromkreis lediglich ein Ohmscher Widerstand, dann ist $N_w = N_s$; die Einheit W ist gleich der Einheit VA zu setzen.

Frage 2: In einem Wechselstromkreis liegt in Reihe mit einem Wirkwiderstand eine Kapazität, die eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung von 35° hervorruft. I_{ges} beträgt 2,5 A, die angelegte Spannung 220 V. Wie groß sind Wirk- und Scheinleistung?

$$\begin{aligned} N_w &= U \times I_{ges} \times \cos \varphi \\ &= 220 \times 2,5 \times \cos 35^\circ \\ &= 220 \times 2,5 \times 0,82 \\ &= 451 \text{ W} \end{aligned}$$

Die Wirkleistung beträgt 451 W

$$\begin{aligned} N_s &= U \times I_{ges} \\ &= 220 \times 2,5 \\ &= 550 \text{ VA} \end{aligned}$$

Die Scheinleistung beträgt 550 VA

An diesen beiden Beispielen erkennen wir, daß die Scheinleistung um rund 100 VA höher liegt als die Wirkleistung. Bei größer werdendem Phasenwinkel wächst diese Differenz, bis zuletzt, bei $\varphi = 90^\circ$, überhaupt keine Wirkleistung mehr abgegeben wird. In diesem Falle haben wir reine Blindleistung. Wie wird diese ermittelt?

Auch das erkennen wir aus dem Leistungsdreieck Abb. 43. Das Verhältnis N_b zu N_s ist der Sinus des Phasenwinkels φ . Um N_b zu errechnen, wenden wir folgende Formel an:

$$N_b = U \times I_{ges} \times \sin \varphi \text{ [BlW]}$$

Um im Beispiel 2 den Blindleistungsanteil zu ermitteln, setzen wir in obige Formel folgende Werte ein:

$$\begin{aligned} N_b &= 220 \times 2,5 \times \sin 35^\circ \\ &= 220 \times 2,5 \times 0,57 \\ &= 313,5 \text{ BlW} \end{aligned}$$

Die Blindleistung beträgt 313,5 BlW

Zum Beweise, daß unsere Rechnung stimmt, addieren wir Wirk- und Blindleistung geometrisch. Die Quadratwurzel aus der Summe von $N_w^2 + N_b^2$ muß einen Scheinleistungswert von rund 550 VA ergeben.

$$\begin{aligned} N_s &= \sqrt{451^2 + 313,5^2} \\ &= \sqrt{203\,401 + 98\,283} \\ &= \sqrt{301\,684} &= \underline{549 \text{ VA}} \\ &\quad \frac{5}{5\,176 : 104} \\ &\quad \frac{4\,16}{1\,008'4 : 1089} \\ &\quad \frac{9\,801}{9\,801} \end{aligned}$$

Wir sehen, daß unsere Rechnung stimmt. Infolge der Abrundungen erhalten wir 549 VA gegenüber 550 VA.

Im Interesse der Elektrizitätswerke, deren Maschinen Scheinleistung abgeben, muß der Phasenwinkel φ möglichst klein gehalten werden. Bestimmungsgemäß darf $\cos \varphi$ den Wert von 0,8 nicht unterschreiten, sonst ist der Bezieher von elektrischer Energie verpflichtet, durch geeignete Maßnahmen, wie ein Beispiel in Ziffer 22 gebracht wird, den Phasenwinkel – wie man sagt – zu kompensieren.

Zusammenfassung

Bei der Wechselstromleistung ist zu unterscheiden zwischen Schein-, Wirk- und Blindleistung.

Wirkleistung N_w wird an einen Ohmschen Widerstand, Blindleistung N_b an einen Blindwiderstand, Scheinleistung N_s an einen Scheinwiderstand abgegeben.

Um gute Wirkleistung zu erzielen, ist der Blindwiderstand so klein wie möglich zu halten.

Der Faktor, der die Größe der Wirkleistung bestimmt, ist der Cosinus des Phasenwinkels φ ($\cos \varphi$).

Ist $\varphi = 0^\circ$, so ist $\cos \varphi = 1$, die Wirkleistung ist gleich der Scheinleistung.

$$N_w = U \times I_{ges} \times 1 = N_s = U \times I_{ges} \text{ [VA]}$$

Je größer φ ist, um so geringer wird die Wirkleistung, weil der \cos von 1 bis 0 fällt, wenn φ von $0^\circ - 90^\circ$ steigt:

$$N_w = U \times I_{ges} \times \cos \varphi \text{ [W]}$$

Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist $\cos \varphi = 0$, die Wirkleistung demnach

$$N_w = U \times I_{ges} \times 0 = 0 \text{ [W]}$$

Wir haben in diesem Fall nur Blindleistung.
Die Blindleistung errechnet sich zu:

$$N_b = U \times I_{ges} \times \sin \varphi \text{ [BIW]}$$

Bei $\varphi = 90^\circ$ haben wir reine Blindleistung, weil $\sin \varphi = 1$ ist. Jetzt ist die **Blind-**leistung gleich der Scheinleistung.

Wirk- und Blindleistung addieren sich geometrisch zur Scheinleistung:

$$N_s = \sqrt{N_w^2 + N_b^2}$$

(20) Gesamt-, Wirk- und Blindstrom (Stromzerlegung)

Die Blindleistung verursacht bei Kapazitäten den Aufbau des elektrischen Feldes, bei Induktivitäten den Aufbau des magnetischen Feldes und damit die Sekundär-EMK beim Transformator oder die Gegen-EMK bei Induktivitäten. Es liegt daher nahe, von einem Blindstrom I_b zu sprechen. Wenn wir jedoch einen Blindstrom I_b annehmen, müssen wir ebenso von einem Wirkstrom I_w sprechen, der in Phase mit der Spannung U über dem Ohmschen Widerstand im Stromkreis die Wirkleistung N_w verursacht.

Es muß besonders hervorgehoben werden, daß es bei Reihenschaltung von R und L oder R und C **keine** Stromzerlegung gibt. Wir haben es immer mit einem Gesamtstrom I_{ges} zu tun. I_b und I_w sind in diesem Zusammenhange nur Rechengrößen, die man sich aus dem Leistungsdreieck ableiten kann, wenn man alle drei Leistungen durch U teilt.

Mit Hilfe der Zeigerdarstellung wird die Vorstellung von Wirk-, Blind- und Gesamtstrom erleichtert. Abb. 44 zeigt uns den Gesamtstrom I_{ges} in einer bestimmten Phasenlage (hier 45°) zur Spannung U . Diesen Gesamtstrom I_{ges} müssen wir uns in einen Blindstrom I_b , der im rechten Winkel zum Spannungszeiger steht, und in einen Wirkstrom I_w , der mit der Spannung in Phase ist, aufgeteilt denken. Wir

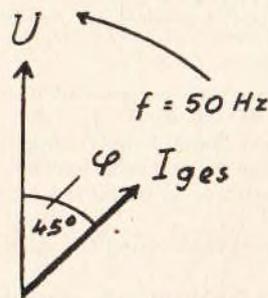


Abb. 44

erhalten somit ein Stromdreieck, dessen Hypotenuse den Gesamtstrom I_{ges} darstellt. In Abb. 45 ist diese Stromzerlegung veranschaulicht. I_{ges} errechnet sich, da wir wieder ein rechtwinkliges Dreieck gewonnen haben, zu

$$I_{ges} = \sqrt{I_w^2 + I_b^2}$$

Aus Abb. 45 ist weiterhin ersichtlich, daß

$$I_w = I_{ges} \times \cos \varphi$$

$$\text{und } I_b = I_{ges} \times \sin \varphi$$

ist.

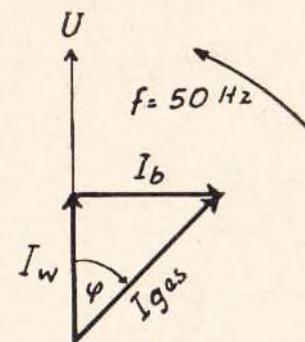


Abb. 45

Auch auf diesem Wege kommen wir zu den Leistungsformeln der Ziffer 19. Nehmen wir an, daß die Spannung U ein Faktor der Leistungsformel ist, so sind die weiteren Faktoren entweder $I_{ges} \times \cos \varphi$ oder $I_{ges} \times \sin \varphi$. Wir erhalten für N_w :

$$N_w = U \times I_w$$

$$= U \times I_{ges} \times \cos \varphi$$

für N_b :

$$N_b = U \times I_b$$

$$= U \times I_{ges} \times \sin \varphi$$

N_s ist dann:

$$N_s = U \times I_{ges}$$

$$= U \times \sqrt{I_w^2 + I_b^2}$$

(21) Parallelschaltung von Widerstand R und Kapazität C

Bisher hatten wir in der Wechselstromlehre die **Reihenschaltung** eines Ohmschen Widerstandes R mit einer Induktivität L (Abb. 26a) und eines Ohmschen Widerstandes R mit einer Kapazität C (Abb. 26b) besprochen. Wir hatten festgestellt, daß die Größe des Phasenwinkels φ von den Größen R und L bzw. R und C sowie von der Frequenz f (als Faktor von ω) abhängig ist. φ beeinflusst – je nach seiner Größe – den Wirkleistungsanteil an der Scheinleistung.

Wir wollen jetzt die **Parallelschaltung** von R und C gem. Abb. 46 streifen.

Der Wirkwiderstand R_w und der kapazitive Blindwiderstand $R_C = \frac{1}{\omega C}$ liegen an

der gleichen Spannung U . Der Gesamtstrom I_{ges} teilt sich auf in einen Wirkstrom I_w , der durch den Wirkwiderstand fließt und mit der Spannung U in Phase ist, und in einen Blindstrom I_C über C , der der Spannung U um 90° vorausschlägt. I_{ges} beträgt daher gem. Ziffer 20:

$$I_{ges} = \sqrt{I_w^2 + I_C^2}$$

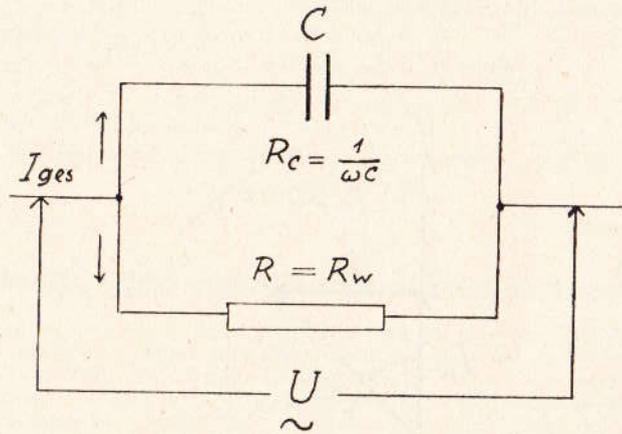


Abb. 46

Der Phasenwinkel φ errechnet sich aus seinem Tangens (Abb. 47a):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C}{I_w}$$

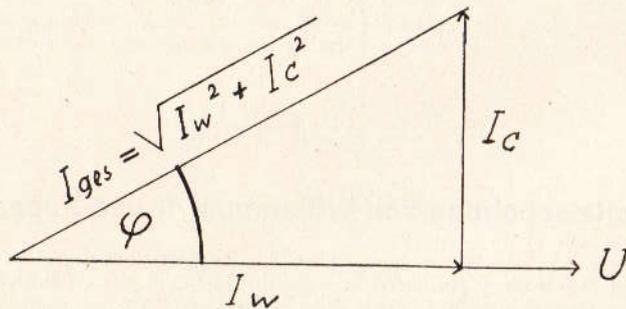


Abb. 47a

Dividiert man $I_{ges} = \sqrt{I_w^2 + I_C^2}$ durch den Effektivwert der über der Anordnung Abb. 46 herrschenden Spannung U , dann ist:

$$\frac{I_{ges}}{U} = \sqrt{\left(\frac{I_w}{U}\right)^2 + \left(\frac{I_C}{U}\right)^2}$$

$\frac{I_{ges}}{U}$ ist der Gesamt-Leitwert G_{ges} oder Scheinleitwert G_s . Es ist bekanntlich $G = \frac{1}{R}$.

Da $R = \frac{U}{I}$ ist, können wir die Leitwertformel wie folgt schreiben:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{U}{I}} = \frac{I}{U}$$

Setzen wir an Stelle von $\frac{I}{U}$ den Buchstaben G , so erhält die Formel $\frac{I_{ges}}{U} =$

$$\sqrt{\left(\frac{I_w}{U}\right)^2 + \left(\frac{I_C}{U}\right)^2} \text{ folgende Form:}$$

$$G_{ges} (G_s) = \sqrt{G_w^2 + G_C^2}$$

Wir erhalten ein Leitwertdreieck, das Abb. 47b zeigt.

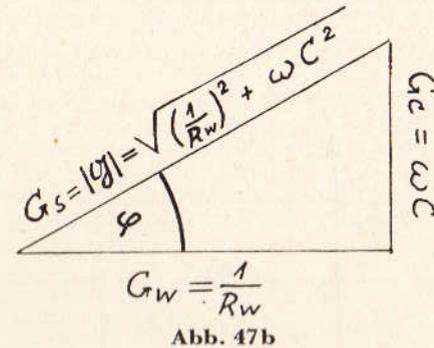


Abb. 47b

Aus der Abb. 47b entnehmen wir, daß der kapazitive Blindleitwert positiv zu werten ist. G_s ist der Gesamt- oder Scheinleitwert der Anordnung. Sein Kehrwert ergibt den Scheinwiderstand R_s .

$$R_C \text{ ist } \frac{1}{\omega C}, \text{ demzufolge ist } G_C = \frac{1}{R_C} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C}} = \omega C;$$

$$\text{entsprechend ist } G_L = \frac{1}{R_L} = \frac{1}{\omega L}.$$

Die Dreiecke Abb. 47a und b sind (geometrisch) ähnlich, weil sie im Verhältnis zweier Seiten übereinstimmen. Daher ist φ in Abb. 47a gleich φ in Abb. 47b.

Weitere Ausführungen zu dieser Ziffer sollen nicht gebracht werden, weil die praktische Anwendung in der Fernmeldetechnik begrenzt ist und eine Berechnung für uns kaum in Frage kommt.

(22) Reihenschaltung von R , L und C

Bei einer Reihenschaltung von R , L und C gem. Abbildung 48 ergeben sich drei Möglichkeiten, nämlich:

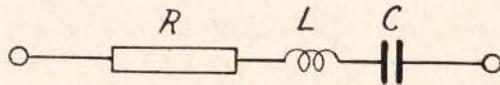


Abb. 48

1. Der **induktive** Blindwiderstand ωL ist größer als der kapazitive $\left(\frac{1}{\omega C}\right)$.
2. Der **kapazitive** Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ ist größer als der induktive (ωL) .
3. Der induktive und der kapazitive Blindwiderstand sind **gleich** groß.

Zu Fall 1:

Ist ωL **größer** als $\frac{1}{\omega C}$ ($\omega L > \frac{1}{\omega C}$), so überwiegt der **induktive** Blindwiderstand ωL . Wir erhalten einen **positiven** Phasenwinkel φ , dessen Größe abhängig ist von der Differenz zwischen der Gegenkathete ωL und der Gegenkathete $\frac{1}{\omega C}$. Abb. 49a und b sollen uns das veranschaulichen.

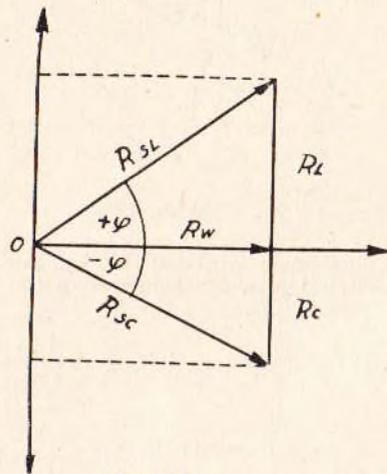


Abb. 49a

In Abb. 49a wird die Größe des positiven Phasenwinkels $+\varphi$ - neben dem Wirkwiderstand R_w - durch den induktiven Blindwiderstand R_L als dessen Gegenkathete bestimmt. Die Größe des negativen Phasenwinkels $-\varphi^*$ ist hier nur von dem kapazitiven Blindwiderstand R_C als Gegenkathete abhängig, weil R_w unverändert geblieben ist. Wir wählen die Bezeichnungen R_L und R_C , um bei unseren Betrachtungen diese Blindwiderstände leicht auseinanderhalten zu können. Demzufolge erhält der **induktive** Scheinwiderstand die Bezeichnung R_{SL} und der **kapazitive** R_{SC} .

*) Anm.: Wenn im folgenden von einem negativen Phasenwinkel $-\varphi$ die Rede ist, so ist damit gemeint, daß hierfür **negative Werte** eingesetzt werden müssen, z. B. $\cos \varphi = -0,8 = -36^\circ$.

Da hier R_L in seinem Wert den von R_C überwiegt, müssen wir den Betrag von R_C von R_L abziehen. Dieses haben wir in Abb. 49b so dargestellt, daß wir die Strecke, die den Betrag von R_C angibt, von **oben nach unten** neben R_L abgetragen haben. Die Differenz ergibt die Strecke $R_L - R_C = R_b$ in Abb. 49b. Die Gegenkathete des

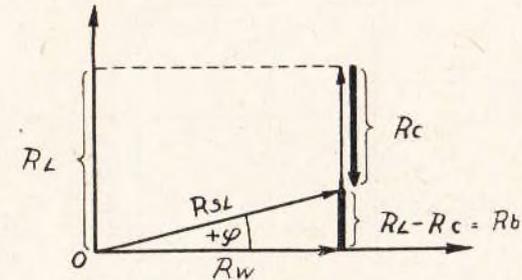


Abb. 49b

Phasenwinkels $+\varphi$ ist somit kleiner geworden, der Phasenwinkel $+\varphi$ demnach auch. Das bedeutet, daß sich der Blindstromanteil $I_b = I_{ges} \times \sin \varphi$ an dem Gesamtstrom ebenfalls verkleinert hat. Damit hat sich der Wirkstromanteil $I_w = I_{ges} \times \cos \varphi$ vergrößert. Wir sind also in der Lage, durch Hinzuschalten einer **Kapazität** in einem induktiv belasteten Wechselstromkreis den Wert des Blindstromes zu verkleinern oder gar aufzuheben und somit den Wirkleistungsanteil an der Scheinleistung zu vergrößern.

Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom lautet, wenn R, L und C hintereinandergeschaltet werden:

$$\begin{aligned}
 I_{ges} &= \frac{U}{R_s} \\
 &= \frac{U}{\sqrt{R_w^2 + (R_L - R_C)^2}} \\
 &= \frac{U}{\sqrt{R_w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Zu Fall 2:

Ist $R_C = \frac{1}{\omega C}$ **größer** als $R_L = \omega L$ ($\frac{1}{\omega C} > \omega L$), so überwiegt gem. Abb. 50a und b der **kapazitive** Blindwiderstand $R_C = \frac{1}{\omega C}$.

Von R_C ist der Betrag von R_L abzuziehen. Die Differenz $R_C - R_L = R_b$ ist in Abb. 50b als Gegenkathete zu $-\varphi$ zu erkennen. Auch hier wird der Phasenwinkel verkleinert und somit der Wirkstromanteil am Gesamtstrom vergrößert.

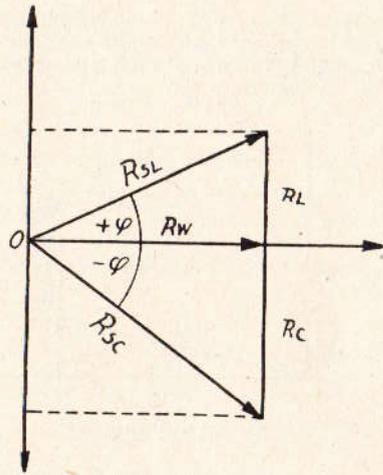


Abb. 50a

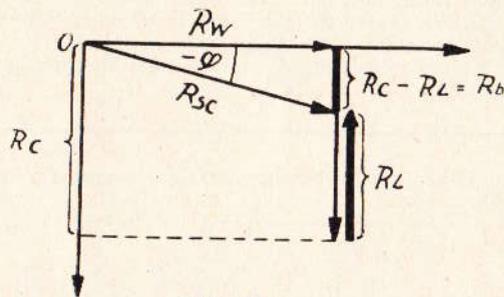


Abb. 50b

Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom:

$$I_{ges} = \frac{U}{\sqrt{R_w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

gilt hier sinngemäß. Wir ziehen in der Klammer den kleineren Betrag stets von dem größeren ab, also hier ωL von $\frac{1}{\omega C}$ oder, anders geschrieben, $R_C - R_L$ und nehmen die Differenz zum Quadrat.

Ist z. B. $\omega L = 700 \Omega$ und $\frac{1}{\omega C} = 1500 \Omega$, so ziehen wir $\omega L = 700 \Omega$ von $\frac{1}{\omega C} = 1500 \Omega$ ab und erhalten die Differenz von $1500 - 700 = 800 \Omega$. Diese 800Ω nehmen wir zum Quadrat:

$$800 \times 800 = 640\,000$$

und zählen diesen Betrag zum Quadrat des Wirkwiderstandes. R_w möge 600Ω betragen, R_w^2 ist demnach $600 \times 600 = 360\,000$.

$$R_w^2 + R_b^2 \text{ ist dann} \\ 360\,000 + 640\,000 = 1\,000\,000$$

R_s errechnet sich zu:

$$R_s = \sqrt{1\,000\,000} \\ = 1\,000 \Omega$$

Zu Fall 3:

Ist $R_L [\omega L]$ **gleich** $R_C \left[\frac{1}{\omega C}\right]$ ($\omega L = \frac{1}{\omega C}$), so heben sich die induktiven und kapazitiven Blindwiderstände auf. **Der Phasenwinkel φ wird gleich Null.** Strom und Spannung sind dann in Phase; an den Wechselstromkreis wird ausschließlich **Wirk- oder Nutzleistung** abgegeben.

Hierzu betrachten wir die Abb. 51a und b.

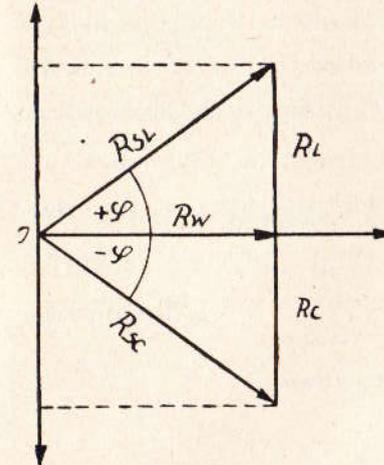


Abb. 51a

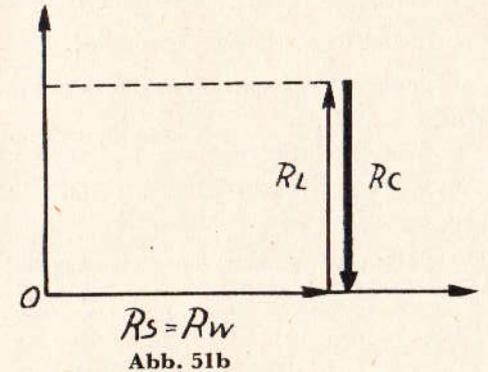


Abb. 51b

In diesen Abbildungen erkennen wir, daß die Strecke R_L gleich der Strecke R_C ist. Verfahren wir wie im Falle 1 (Abziehen der Strecke R_C von R_L), so erhalten wir das Bild Abb. 51b: Beide Gegenkatheten sind **gleich** lang. Infolge ihrer entgegengesetzten Richtung ergibt R_L minus R_C den Wert 0, so daß kein Phasenwinkel entstehen kann und $R_s = R_w$ wird. Strom und Spannung sind also in Phase; I_{ges} ist gleich I_w und N_s ist gleich N_w . Wir haben den induktiven Blindwiderstand durch einen gleich großen kapazitiven – wie man sagt – „kompensiert“.

Auch hier gilt das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom:

$$I_{ges} = \frac{U}{R_s} \\ = \frac{U}{\sqrt{R_w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Nehmen wir an, daß ωL 900Ω und $\frac{1}{\omega C}$ ebenfalls 900Ω betrage. R_w habe einen

Wert von 600Ω , $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ ist dann gleich Null, weil $900 - 900 = 0$ ist. Unter der

Wurzel steht also $\sqrt{600^2 + (900 - 900)^2} = \sqrt{600^2 + 0} = \sqrt{600^2}$. $\sqrt{600^2}$ ist gleich 600 . Wir erkennen also auch rechnerisch, daß in diesem Wechselstromkreis nur der Ohmsche Widerstand wirksam ist und demzufolge **nur** Nutzleistung abgegeben wird.

Zusammenfassung:

Wenn zu einer Reihenschaltung von Ohmschem Widerstand R und Induktivität L eine Kapazität C gleichfalls in Reihe geschaltet wird, ist neben dem Ohmschen Widerstand nur die Differenz der beiden Blindwiderstände ($R_L - R_C$) wirksam.

Ist $R_L = \omega L$ größer als $R_C = \frac{1}{\omega C}$, so verringert sich der **induktive** Blindwiderstand

auf die Differenz zwischen ωL und $\frac{1}{\omega C}$. Der Phasenwinkel φ bleibt **positiv**; die

Anordnung behält **induktiven Charakter**; φ wird jedoch kleiner als ursprünglich.

Ist $R_C = \frac{1}{\omega C}$ größer als $R_L = \omega L$, so verringert sich der **kapazitive** Blindwiderstand

auf die Differenz zwischen $\frac{1}{\omega C}$ und ωL . Der Phasenwinkel φ bleibt **negativ**; die

Anordnung behält **kapazitiven Charakter**; φ wird jedoch kleiner als ursprünglich.

Ist $R_L = R_C$ ($\omega L = \frac{1}{\omega C}$), so ist die Differenz zwischen dem induktiven und dem

kapazitiven Blindwiderstand gleich Null ($\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$). Der Phasenwinkel φ

ist gleich Null.

Für alle drei Fälle gilt das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom:

$$I_{ges} = \frac{U}{R_s} = \frac{U}{\sqrt{R_w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

(23) Resonanz

Dieser physikalische Begriff soll nur insoweit erläutert werden, als wir ihn zum Verständnis des Nachfolgenden benötigen.

Wir wissen aus Erfahrung, daß z. B. eine Blattfeder, die an einem Ende befestigt ist, in Schwingungen gerät, wenn wir sie spannen und anschließend loslassen. Daneben hören wir einen Ton. Dieser Ton ist um so höher, je schneller die Feder schwingt. Die Feder schwingt also in einer bestimmten Frequenz, der sogenannten „Eigenfrequenz“, die von verschiedenen Umständen, unter anderem auch von ihrer Länge, abhängt. Die Blattfeder ist ein sogenanntes „schwingfähiges Gebilde“.

Weitere schwingfähige Gebilde sind z. B. die Spiralfeder einer Uhr, die Saite einer Geige, das Chassis eines Autos, kurz, Gegenstände, die elastisch sind.

Eine Stimmgabel, die wir jetzt näher behandeln wollen, ist ein schwingfähiges Gebilde mit einer Eigenfrequenz von 440 Hz , die dem „Kammerton a“ entspricht. Schlagen wir eine solche Stimmgabel an, so hören wir einen klaren Ton der Frequenz 440 Hz . Der Ton entsteht dadurch, daß die schwingenden Bänder der Stimmgabel die Luft anstoßen und Schallwellen erzeugen, die die gleiche Frequenz wie die Stimmgabel haben.

Wir stellen jetzt in einiger Entfernung von unserer Stimmgabel eine zweite auf, die die gleiche Eigenfrequenz wie die erste hat. Schlagen wir die erste Stimmgabel an und legen gleich danach unsere Hand um die Bänder, so kann die Stimmgabel nicht mehr schwingen. Trotzdem hören wir aber weiterhin den gleichen Ton, nur etwas leiser. Dieser Ton rührt von der zweiten Stimmgabel her, obwohl wir sie nicht angeschlagen haben. Da sie die gleiche Eigenfrequenz wie die erste hat, haben die Schallwellen die zweite Stimmgabel angestoßen und sie zum Schwingen angeregt. Diesen Vorgang bezeichnet man mit **Resonanz**. Sobald sich die Eigenfrequenz einer der beiden Stimmgabeln nur um ein geringes verändert, entstehen keine Resonanzerscheinungen. Die Stimmgabeln sind dann nicht aufeinander „abgestimmt“.

Die Resonanz spielt in Natur und Technik eine außerordentlich große Rolle. Ohne diese Erscheinung wären viele Formen der Übermittlung von Nachrichten (Funk, Trägerfrequenztelephonie, Wechselstromtelegraphie usw.) nicht möglich.

Wir werden im folgenden die zwei elektrischen Resonanzfälle behandeln, auf denen sich unsere Übertragungstechnik weitestgehend aufbaut: die Reihen- und die Parallelresonanz.

(24) Die Reihenresonanz

Als Leitmotiv setzen wir bei dieser und den nächsten Ziffern stets folgenden Satz:

Resonanz ist dann gegeben, wenn im Wechselstromkreis mit Induktivität und Kapazität die induktiven und kapazitiven Blindwiderstände gleich sind, wenn also

$$R_L = R_C$$

d. h. $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist.

Diesen Fall hatten wir bereits bei der Reihenschaltung von R , L und C (Ziffer 22) behandelt. Wir hatten theoretisch erörtert, daß der Wirkstrom I_w gleich dem

Gesamtstrom I_{ges} wird, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist. Es heben sich dann die induktiven und

kapazitiven Blindwiderstände auf; im Stromkreis ist nur der Ohmsche Widerstand wirksam.

Diesen Fall, in dem R , L und C in Reihe liegen und $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist, nennt man den Reihenresonanzfall.

Der Gesamtstrom der Anordnung Abbildung 48, die wir als Abbildung 52 noch einmal bringen, ist für eine bestimmte Frequenz, die **Resonanzfrequenz f_r** ,

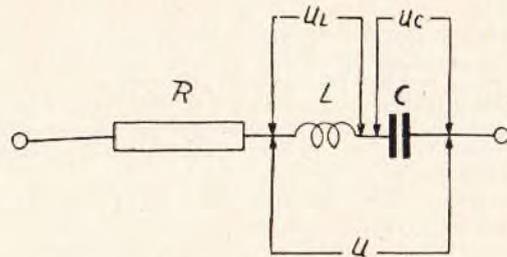


Abb. 52

lediglich gleich dem Ohmschen Widerstand der Anordnung. Für alle Frequenzen ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz wächst der Widerstand mit zunehmendem Abstand von ihr.

Wir wollen vorerst einen Versuch besprechen, bevor wir auf das oben Gesagte näher eingehen.

Wir nehmen einen Schiebewiderstand von rund 100 Ohm, eine Spule mit 1200 Windungen, einige Kondensatoren, die wir mittels eines Schaltbrettes bequem parallel schalten können, einen U-Kern mit verschiebbarem Joch und einen Wechselstrommesser mit einem Meßbereich von 0 bis 1 Ampere.

Vorerst schalten wir den Ohmschen Widerstand von 100 Ohm in Reihe mit drei parallel geschalteten Kondensatoren (zwei zu $4 \mu\text{F}$ und einen zu $2 \mu\text{F}$) und dem Wechselstrommesser. Bei unserer Netzfrequenz von 50 Hz zeigt das Amperemeter einen Strom von etwa 0,6 A an (Gesamtstrom I_{ges} !).

Jetzt vertauschen wir die Kondensatoren mit der Spule 1200 Windungen, die wir über den U-Kern schieben. Bei aufgelegtem Joch zeigt der Strommesser einen Wert von etwa 0,12 A an. Der Blindwiderstand dieser Induktivität ist demnach wesentlich größer als der der Kapazität.

Wenn wir das Joch verschieben, so wird der Zeigerausschlag des Strommessers größer, weil wir hiermit die Induktivität verkleinern.

Wir merken uns:

1. $R = 100 \Omega$ und $C = 10 \mu\text{F}$ in Reihe ergibt bei $U = 220 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ einen Gesamtstrom I_{ges} von 0,6 A.
2. $R = 100 \Omega$ und L mit geschlossenem Eisenkreis in Reihe geschaltet, ergibt bei $U = 220 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ einen Gesamtstrom I_{ges} von 0,12 A.
3. Durch Verschieben des Joches des Eisenkernes wird L verringert, I_{ges} steigt.
4. Bei den Versuchen gem. 1. und 2. sind wir über eine Stromstärke von $I_{\text{ges}} = 0,6 \text{ A}$ nicht hinausgekommen.

Nun schalten wir gem. Abbildung 52 und 53 R , L und C hintereinander und beobachten das Instrument.

Wir sehen, daß der Zeigerausschlag nicht etwa **kleiner**, sondern **größer** als 0,6 A geworden ist. Verschieben wir das Joch, so werden wir feststellen, daß bei einer ganz bestimmten Stellung des Joches der Strom einen besonders hohen Wert annimmt, um dann bei weiterem Verschieben des Joches wieder abzusinken.

Wir folgern hieraus:

1. Sind induktive und kapazitive Widerstände in Reihe geschaltet, so vergrößert sich nicht etwa der Gesamtwiderstand, sondern er **verkleinert** sich

$$(\omega L - \frac{1}{\omega C}, \text{ vgl. Ziffer 22}).$$

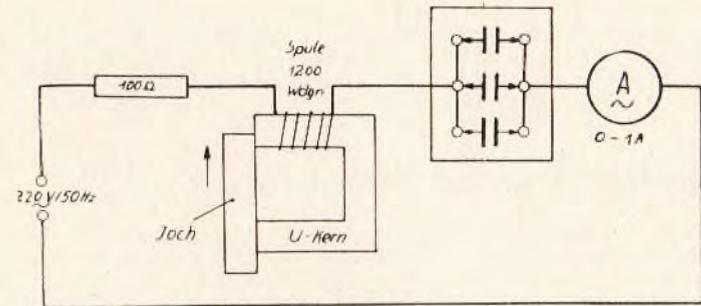


Abb. 53

2. Bei einer ganz bestimmten Größe der Induktivität wird der Widerstand der Anordnung sehr klein und nimmt lediglich den Wert des Ohmschen Widerstandes an. **Wir haben hier den Reihenresonanzfall.** ωL ist dann gleich $\frac{1}{\omega C}$.

Die Überlegungen in Ziffer 22 finden wir durch diesen Versuch bestätigt.

Selbstverständlich können wir einen Reihenresonanzfall erzeugen, wenn wir nicht die Größe der **Induktivität** verändern, sondern die der **Kapazität**. In jedem Falle

haben wir Resonanz, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist. Im Wechselstromkreis ist dann lediglich

der Ohmsche Widerstand wirksam.

Da ωL und $\frac{1}{\omega C}$ frequenzabhängige Widerstände sind, ist der Wert von ωL bzw. $\frac{1}{\omega C}$

für jede Frequenz unterschiedlich. Bei hoher Frequenz, also bei hohem Wert für ω , braucht der Wert von L nur sehr klein zu sein (z. B. einige Millihenry), um bei kleinem Wert von C einen Resonanzfall herzustellen. Der stärkste Strom fließt im **Resonanzfall** durch die Anordnung. Da der Resonanzfall infolge der frequenzabhängigen Glieder auch frequenzabhängig ist, nennt man die Frequenz im Resonanzfall die **Resonanzfrequenz f_r** . Für diese Resonanzfrequenz ist der Widerstand der Anordnung am geringsten: er ist gleich dem Ohmschen Widerstand. Für jede andere Frequenz, gleich, ob sie unter- oder oberhalb der Resonanzfrequenz liegt, wird der Widerstand mit ab- oder zunehmender Frequenz größer. Ganz allgemein kann man bei einer Reihenresonanzschaltung sagen, daß sie die Resonanzfrequenz f_r durchläßt, jede andere aber mit größer werdendem Abstand von ihr entsprechend schwächt (siehe Resonanzkurve, Ziffer 25). Wir hätten gewissermaßen ein Sieb, das nur dieser Resonanzfrequenz kein Hindernis entgegensetzt. In der Fernmelde-technik spricht man dann von einem **Saugkreis**.

Eine weitere interessante Erscheinung tritt bei der Reihenresonanz auf. Messen wir mittels eines besonders hochohmigen Spannungsmessers die Spannungen, die über der Kapazität C und der Induktivität L herrschen, so werden wir feststellen, daß diese Spannungen wesentlich höher sind als die über der Gesamtanordnung herrschende (in Abb. 52 dargestellt durch U_C und U_L). Messen wir jedoch die Spannung über C und L (in Abb. 52 dargestellt durch das Zeichen U), so zeigt der Zeiger unseres Spannungsmessers nichts oder kaum etwas an. Wir müssen daraus schließen, daß die Spannungen U_C und U_L gegeneinander gerichtet sind und sich damit aufheben.*)

*) Anm.: Die Berechnung dieser Spannungen ist in Ziffer 28 zu finden.

Bei der Reihenschaltung von R , L und C haben wir daher zu beachten, daß die bei Kondensatoren angegebene Betriebsspannung mindestens dreimal so hoch liegt als die an der Anordnung liegende Spannung. In unserem Beispiel würde das bedeuten, daß die Betriebsspannung etwa $3 \times 220 \text{ V} = 660 \text{ V}$ betragen könnte. Dieser Punkt ist auch bezüglich der Isolation von Selbstinduktionsspulen zu beachten.

(25) Resonanzkurven bei Reihenresonanz

Mit Hilfe der Anordnung Abb. 53 lassen sich sogenannte „Resonanzkurven“ leicht aufnehmen. Aus ihnen ist die „Durchlaßbreite“ für Frequenzen, die ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz f_r liegen, zu ersehen. Der Idealfall ist, daß nur die Resonanzfrequenz „durchgelassen“ wird und alle Frequenzen ober- und unterhalb von ihr völlig gesperrt werden. In der Praxis ist dieser Idealfall nicht darzustellen. In Abhängigkeit von dem Ohmschen- oder Wirkwiderstand im Wechselstromkreis wird die Resonanzkurve mehr oder weniger steil, wie wir das aus Abb. 54 ersehen können.

In dieser Abbildung erkennen wir zwei Kurven: Kurve 1, die verhältnismäßig steil verläuft, und Kurve 2, die wesentlich flacher und breiter als Kurve 1 ist. Zur Auf-

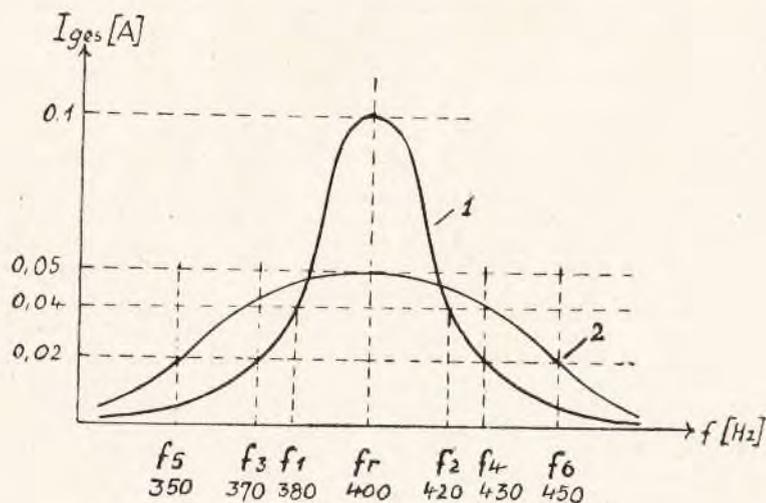


Abb. 54

nahme solcher Resonanzkurven benötigen wir einen Wechselstromgenerator, dessen Frequenz in gewissen Grenzen verändert werden kann, dessen Spannung aber konstant bleibt, z. B. einen Tonfrequenzgenerator. ωL und $\frac{1}{\omega C}$ der Abb. 53, d. h. der induktive und der kapazitive Blindwiderstand, mögen bei einer Frequenz von $f = 400 \text{ Hz}$ gleich sein. Wir haben dann den Reihenresonanzfall, bei dem der Wechselstrom I_{ges} nur durch die Größe des Wirkwiderstandes (hier 100Ω) bestimmt

wird. I_{ges} möge z. B. die Stärke von $0,1 \text{ A}$ haben. Auf der y-Achse tragen wir diesen Stromwert ab und ziehen durch diesen Punkt eine Parallele zur x-Achse. In einem beliebigen Abstand von der y-Achse ziehen wir durch die x-Achse eine Parallele zur y-Achse; der Schnittpunkt beider Linien ergibt gem. Ziffer 4 einen Punkt im I. Quadranten des Koordinatensystems, der dem Werte $x = f_r = 400 \text{ Hz}$ und $y = 0,1 \text{ A}$ entspricht. Bei Veränderung der Frequenz, z. B. auf $f_1 = 380$ oder $f_2 = 420 \text{ Hz}$ bemerken wir, daß der Wechselstrommesser in Abb. 53 auf $0,04 \text{ A}$ sinkt. Verändern wir die Frequenzen weiter, z. B. auf 370 Hz (f_3) oder 430 Hz (f_4), so zeigt uns der Strommesser nur $0,02 \text{ A}$ an. Vergrößern wir den Frequenzabstand von der Resonanzfrequenz noch mehr, z. B. auf 350 Hz (f_5) oder 450 Hz (f_6), so zeigt uns der Strommesser keinen oder nur noch einen äußerst schwachen Strom an. Verbinden wir die Punkte $f_5 - f_3 - f_1 - f_r - f_2 - f_4 - f_6$ miteinander, so erhalten wir eine Kurve, die symmetrisch ansteigt und abfällt; die Symmetrieachse geht durch $f_r = 400 \text{ Hz}$. Die „Durchlaßbreite“ oder der „Durchlaßbereich“ der Schaltung geht in diesem Beispiel praktisch von f_3 bis f_4 , d. h. von etwa 370 bis $430 \text{ Hz} = 60 \text{ Hz}$. Bei den Frequenzen unterhalb von f_3 bzw. f_4 ist die „durchgelassene“ Stromstärke I_{ges} im Verhältnis zur Stromstärke bei $f_r = 0,1 \text{ A}$ so gering, daß sie nicht mehr ins Gewicht fällt.

Denken wir uns die Frequenzen von 350 bis 450 Hz als Ton, so hören wir bei der Resonanzfrequenz $f_r = 400 \text{ Hz}$ den dieser Frequenz entsprechenden Ton laut, bei $f_1 = 380 \text{ Hz}$ und $f_2 = 420 \text{ Hz}$ einen tieferen oder höheren Ton, aber im Verhältnis zum Ton bei $f_r = 400 \text{ Hz}$ ganz erheblich schwächer jedoch in sich gleich laut. Bei den Frequenzen $f_3 = 370 \text{ Hz}$ und $f_4 = 430 \text{ Hz}$ ist der Ton noch schwächer, und bei $f_5 = 350 \text{ Hz}$ und $f_6 = 450 \text{ Hz}$ ist der Ton kaum wahrnehmbar.

Den Widerstand von 100Ω ersetzen wir durch einen solchen von 200Ω und führen die gleichen Messungen durch wie bei einem Wirkwiderstand von 100Ω . Wir stellen fest, daß die Stromstärke im Resonanzfalle nur $0,05 \text{ A}$, also die Hälfte der ursprünglichen, beträgt, und daß die Kurve 2 viel flacher als die Kurve 1 verläuft. Die Durchlaßbreite beträgt jetzt etwa $f_3 - f_r - f_4 = 350$ bis $450 \text{ Hz} = 100 \text{ Hz}$, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß sich die Stromstärken im Verhältnis zum ersten Falle weit weniger stark bei sich verändernden Frequenzen ändern. Wir hören z. B. den Ton bei $f_3 = 370$ bzw. $f_4 = 430 \text{ Hz}$ fast ebenso laut wie bei der Resonanzfrequenz f_r .

Aus diesen beiden Beispielen erkennen wir, daß ein Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis mit Induktivität und Kapazität in Resonanz stark „dämpfend“ wirkt. Um eine möglichst steile Resonanzkurve und damit einen schmalen Durchlaßbereich zu erreichen, muß der Ohmsche Widerstand in einem solchen Wechselstromkreis sehr klein gehalten werden. Man erreicht das, indem man den Ohmschen Widerstand der Induktivität so klein wie möglich macht. In der Hochfrequenztechnik verwendet man zur Erhöhung der Induktivität einer Spule und zur Verminderung ihres Ohmschen Widerstandes sogenannte „Hochfrequenzeisenkerne“ oder „Massekerne“, bei denen Eisenstaub verwendet wird. Jedes Eisenkörnchen wird durch fabrikatorische Maßnahmen mit einer Isolierschicht überzogen und die gesamte Masse durch starken Druck zusammengepreßt. Diese voneinander isolierten Eisenteilchen setzen den Wirbelströmen einen wesentlich größeren Widerstand entgegen als geblätterte Eisenkerne (vgl. Band IIa, Ziffern 66 und 67 [1. Auflage], Ziffern 28 und 29 [2. Auflage]). Die Eisenverluste, die bei hohen Frequenzen besonders stark ins Gewicht fallen, werden durch diese Maßnahme erheblich herabgesetzt. Infolge der durch Massekerne erhöhten Induktivität einer Spule gegenüber einer solchen ohne Kern, kann die Anzahl der Windungen, die bei eisernen Spulen zur Erzielung der gewünschten Induktivität erforderlich ist, erheblich herabgesetzt werden. Der Ohmsche Widerstand sinkt damit, und die Resonanzkurve wird steiler. Aus diesem Grunde verwendet man bei den hochwertigen Übertragern und Pupinspulen seit einiger Zeit Massekerne.

(26) Die Thomsonsche Schwingungsformel

Wie können wir aus der Resonanzgleichung

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

die Resonanzfrequenz f_r ermitteln?

f ist in ω enthalten; wir müssen also dafür sorgen, daß ω allein zu stehen kommt, z. B. auf der linken Seite der Gleichung. L kommt daher auf die rechte Seite **unter** den Bruchstrich.

Somit ergibt sich:

$$\omega \times \omega = \frac{1}{LC}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Um ω zu erhalten, ziehen wir aus beiden Seiten der Gleichung die Wurzel:

$$\sqrt{\omega^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Da aber $\sqrt{1} = 1$ ist, können wir das Wurzelzeichen rechts unter den Bruchstrich bringen:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Nun setzt sich ω zusammen aus $2\pi \times f$. f ist die gesuchte Resonanzfrequenz f_r . Wir müssen, um f_r auf der linken Seite allein zu haben, die Gleichung durch 2π teilen, und es ergibt sich:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Wir haben hier eine Formel abgeleitet, die von großer Bedeutung ist, die sogenannte **Thomsonsche Schwingungsformel**, mit der wir sicherlich später einmal Befassung haben werden.

Aus der Resonanzgleichung $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ können wir aber noch mehr ermitteln, nämlich die Größe von C , die notwendig ist, um die Induktivität L zu kompensieren oder umgekehrt.

Es ist

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

$$\text{und } C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

Rechenbeispiele hierfür dürften sich wegen der Einfachheit erübrigen.

(27) Parallelschaltung von R , L und C . Parallelresonanz

Nachdem wir in Ziffer 22 die Reihenschaltung von R , L und C und in Ziffer 24 die Reihenresonanz besprochen haben, wollen wir jetzt die Parallelschaltung von R , L und C und den aus dieser Schaltung sich ergebenden Parallelresonanzfall behandeln.

Um unsere Überlegungen zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß der Ohmsche Widerstand R der Selbstinduktionsspule gegenüber ihrem Blindwiderstand sehr klein sei und wir ihn deshalb vernachlässigen können. In den meisten praktischen Fällen trifft das auch zu. Wir erhalten dann folgendes Bild (Abb. 55) und haben einen reinen Blindwiderstand der Anordnung. Eine über sie herrschende Wechselspannung verursacht einen Wechselstrom, der sich im Resonanzfalle und, bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes in einen Teilstrom I_L über L und einen gleich starken Teilstrom I_C über C aufteilt. Die Teilströme sind gleich stark,

weil im Resonanzfalle $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist. I_L eilt um 90° der Spannung nach, I_C um 90° der Spannung vor. I_L und I_C sind demzufolge um 180° gegeneinander phasenverschoben und heben sich auf. Da der Strom im Parallelkreis 0 A beträgt, muß er auch im Zuführungskreis 0 A betragen. Der **Blindwiderstand** der Anordnung ist

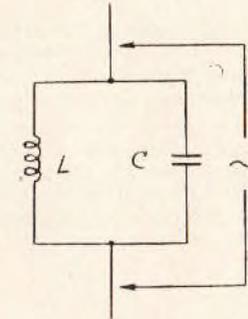


Abb. 55

unendlich groß geworden. Weil I_L und I_C um 180° gegeneinander verschoben sind und sich damit aufheben, nennt man den Parallelresonanzfall auch **Stromresonanz**. An den Endpunkten der Anordnung herrscht jetzt eine außerordentlich hohe Spannung wegen des Elektronenstauses über dem hohen Widerstand.

Da wir in der Praxis jedoch immer einen – wenn auch nur kleinen – Ohmschen Widerstand in der Anordnung Abb. 55 haben, nimmt der Widerstand der Schaltung endliche Werte an, so daß bei einer angelegten Spannung U doch ein gewisser Strom fließt. Immerhin bleibt der Gesamtwiderstand im allgemeinen sehr groß, so daß man bei der Parallelschaltung von R , L und C sagen kann:

Bei der Parallelschaltung von R , L und C wird der Widerstand der Anordnung für die Resonanzfrequenz f_r außerordentlich hoch. Die Resonanzfrequenz wird praktisch gesperrt, alle Frequenzen unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz werden mit zunehmendem Abstand von ihr durchgelassen.

Dieser Resonanzfall heißt Parallel- oder Stromresonanz.

Einen solchen Kreis nennt man auch **Sperrkreis**. Dieser Ausdruck ist wohl fast allen geläufig, weil ein Sperrkreis in vielen Rundfunkempfängern vorhanden ist. Der Sperrkreis soll das „Durchschlagen“ des Ortssenders verhindern, wenn wir einen Sender einstellen, der frequenzmäßig in der Nähe des Ortssenders liegt.

Das oben Gesagte wollen wir durch einen Versuch belegen. Wir benutzen hierzu die gleichen Teile wie in Abb. 53, nur lassen wir den Ohmschen Widerstand fort. Spule, Kondensator und Wechselstrommesser schalten wir gem. Abb. 56.

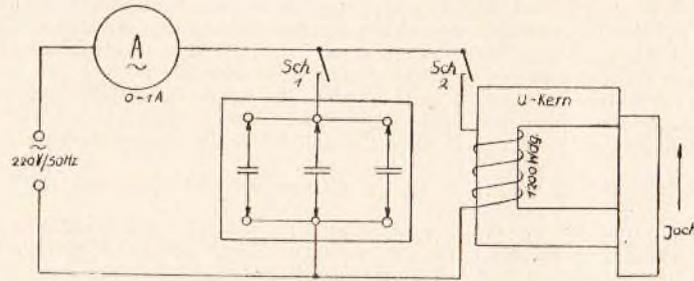


Abb. 56

Vorerst messen wir den Strom, indem wir durch Schließen des Schalters 1 (Sch 1 in Abb. 56) eine Gesamtkapazität von $10 \mu\text{F}$ ohne Spule in den Wechselstromkreis legen. Wir lesen etwa $0,7 \text{ A}$ ab. Öffnen wir Sch 1 und schließen Sch 2, so liegt lediglich die Spule mit **geschlossenem** Eisenkern in dem Stromkreis; wir messen etwa $0,2 \text{ A}$.

Jetzt schalten wir Spule und Kondensator parallel (Schalter 1 und 2 schließen) und stellen fest, daß der Strom nicht etwa stärker, sondern **schwächer** als $0,2 \text{ A}$ geworden ist. Verschieben wir das Joch, so verringern wir die Induktivität. Bei einer ganz bestimmten Stellung des Joches werden wir ein Stromminimum feststellen: wir haben jetzt den Parallelresonanzfall. Bei weiterem Verschieben des Joches steigt der Strom wieder an.

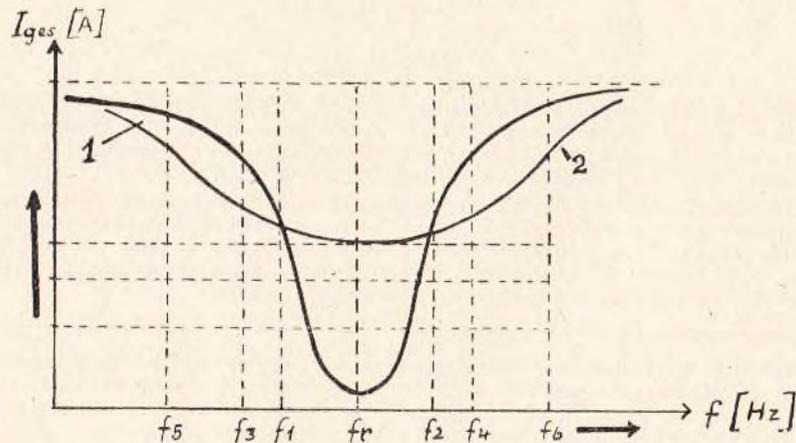


Abb. 57

Durch diesen Versuch haben wir bewiesen, daß im Resonanzfalle $(\omega L = \frac{1}{\omega C})$

der Widerstand der Anordnung für die Resonanzfrequenz f_r sehr hoch ist. Für alle Frequenzen unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz wird der Widerstand mit zunehmendem Abstand von der Resonanzfrequenz geringer. Der Parallelresonanzkreis verhält sich umgekehrt wie der Reihenresonanzkreis.

Die **Resonanzkurve** bei der Parallel- oder Stromresonanz verläuft umgekehrt zu der in Abb. 54 dargestellten Resonanzkurve bei Reihen- oder Spannungsresonanz. Aus Abb. 57 erkennen wir, daß die Stromwerte in der Nähe der Resonanzfrequenz abfallen. Die Steilheit der Resonanzkurven ist wie bei der Reihenresonanz abhängig von dem im Wechselstromkreis befindlichen Ohmschen Widerstand (siehe Kurven 1 und 2 der Abb. 57). Der Widerstand gegenüber dem Wechselstrom der Resonanzfrequenz muß daher ebenso steil ansteigen wie die Stromkurve fällt (Widerstand und Strom stehen im umgekehrten Verhältnis).

(28) Erläuterung der Reihen- und Parallelresonanz durch Rechenbeispiele

Mit Hilfe der Berechnung der Spannungen über den Blindwiderständen ωL und $\frac{1}{\omega C}$

im Falle der Reihenresonanz ist die Reihenresonanz gleichfalls leicht zu erklären. In Ziffer 22, vorletzter Absatz, wurde angedeutet, daß im Reihenresonanzfall die über L und C herrschenden Spannungen wesentlich höher sind als die Spannung über der Gesamtanordnung. Des weiteren ist gesagt worden, daß die Spannungen U_L und U_C gegeneinander gerichtet sind und sich im Resonanzfalle aufheben.

U_L über $R_L = I_{ges} \times \omega L$ und U_C über $R_C = I_{ges} \times \frac{1}{\omega C}$ lassen sich unter Beachtung der Abb. 52 leicht errechnen.

Wir nehmen an, daß $I_{ges} = 1 \text{ A}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ betragen. Setzen wir für L den Wert 10 H und für C den Wert $1,01 \mu\text{F}$ ein, dann beträgt die Spannung über $L = I_{ges} \times R_L = I_{ges} \times \omega L = 1 \times 314 \times 10 = (+) 3140 \text{ V}$. Die Spannung über R_C beträgt:

$$I_{ges} \times (-) \frac{1}{\omega C} = 1 \times (-) \frac{1}{314 \times 1,01 \times 10^{-6}} = (-) \frac{10^6}{314 \times 1,01} = (-) 1000000 : 31714 = (-) 3140 \text{ V}.$$

$+ 3140 \text{ V} - 3140 \text{ V}$ ergibt 0 V : Es herrscht über dem Ohmschen Widerstand die gesamte angelegte Spannung; daher wird die Stromstärke lediglich durch den Ohmschen Widerstand bestimmt. Aus diesen Gründen bezeichnet man auch den

Reihenresonanzfall mit **Spannungsresonanz**. Es ist $I_{ges} \times \omega L = I_{ges} \times (-) \frac{1}{\omega C}$; d. h. $(+) U_L$ ist gleich $(-) U_C$.

Bei der Parallel- oder Stromresonanz ist der Widerstand der Anordnung sehr hoch, theoretisch unendlich. I_L ist dann gleich I_C . Beide Ströme sind dauernd gegeneinander gerichtet (Phasenverschiebung 180°). Der Blindwiderstand R_b der Parallelschaltung ist bei einem Strom $I = 0 \text{ A}$ unendlich groß. Er beträgt:

$$R_b = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

Die Ableitung dieser Formel ist verhältnismäßig einfach. Es ist, wenn wir die Leitwerte G_C und G_L addieren, der Blindleitwert G_b :

$$G_b = G_C + (-G_L)$$

($-G_L$, weil $-$ ähnlich der Ableitung aus dem Stromdreieck gem. Ziffer 22 - der Strom I_L um 180° entgegengesetzt dem Strom I_C gerichtet ist).

$$G_b = \frac{1}{\frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega L}}$$

$$G_b = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

$$G_b = \frac{1}{R_b}; R_b = \frac{1}{G_b}$$

$$R_b = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

(29) Die Bedeutung des Luftspaltes bei Drosselspulen der FM-Technik

In Band IIa, Ziffer 84 (1. Auflage), Ziffer 46 (2. Auflage), 1. Absatz, haben wir gelesen, daß die Induktivität L bei eisenfreien Spulen, also bei Spulen ohne Eisenkern, einen bestimmten, **unveränderlichen**, aber recht kleinen Wert hat. Der Blindwiderstand ωL einer solchen Spule wäre gegenüber unseren Sprachfrequenzen, die über die Fernsprechleitungen übertragen werden und zwischen rund 300 bis 3000 Hz ($\omega = 1884$ bis 18840) liegen, infolge der geringen Induktivität ebenfalls recht klein. Eine ausreichende Drosselwirkung ist nur dann gegeben, wenn wir die Spulen mit außerordentlich vielen Windungen entsprechend dicken Drahtes versehen. Das erfordert jedoch Spulen, die einen sehr großen Raum einnehmen, der in den meisten Fällen nicht vorhanden ist. Versehen wir die Spule mit einem geschlossenen Eisenkreis, so schwankt die Induktivität L mit der Stärke des die Spule durchfließenden Stromes. Das hat zur Folge, daß bei unterschiedlichen Sprechwechselstromstärken auch die Induktivität L der Drosselspule schwankt.

Wir schließen daher einen Kompromiß, indem wir kleinere Drosselspulen verwenden, d. h. Spulen mit einer geringeren Windungszahl als die einer Spule ohne Eisenkern, und umgeben sie mit einem Eisenkreis, der einen Luftspalt hat. Der Eisenkreis bringt eine höhere Induktivität; der Luftspalt sorgt dafür, daß die Induktivität annähernd konstant bleibt.

Der Blindwiderstand ωL solcher Spulen ist zwar geringer als der einer Spule mit geschlossenem Eisenkreis, ist aber bei geeigneter Bemessung der Spulen noch groß genug, um für die übertragenden Sprachfrequenzen, auch bei geringen Stromstärken, noch eine genügende Drosselwirkung hervorzurufen.

Hinzu kommt noch folgendes: Die Drosselspulen in der Fernmeldetechnik werden sehr häufig zusätzlich von einem Gleichstrom durchflossen, z. B. Speisedrosseln (Band V, Abschnitt C, Speisebrückenschaltungen).

Im Band IIa war von Magnetisierungskurven und Hysterisis die Rede. Wir wiederholen, daß bei weichem Eisen (aus dem der Kern unserer Drosselspule besteht) eine

sehr geringe magnetische Feldstärke \mathcal{H} (in $\frac{\text{Aw}}{\text{cm}}$) benötigt wird, um den Sättigungs-

punkt des Eisens zu erreichen. Des weiteren hatten wir festgestellt, daß zur Überwindung der Remanenz eine Kraft - die Koerzitivkraft - notwendig ist, um in einem magnetischen Wechselfeld den Kraftfluß in entgegengesetzte Richtung verlaufen zu lassen.

Die im allgemeinen verhältnismäßig hohe Windungszahl der Drosselspulen und der verhältnismäßig starke Gleichstrom, der durch die Wicklungen fließt, ergeben

eine recht hohe magnetische Feldstärke \mathcal{H} (in $\frac{\text{Aw}}{\text{cm}}$). Bei einem geschlossenen

Eisenkreis ist der magnetische Widerstand R_m gering, so daß die völlige magnetische Sättigung in fast jedem Falle erreicht und meist weit überschritten wird. Das magnetische Wechselfeld, das durch unsere sehr schwachen Sprechwechselströme entsteht und das Gleichstromfeld überlagert, ist gar nicht in der Lage, an der magnetischen Sättigung etwas zu ändern. Die negativen Wechsel würden zwar das Gleichstromfeld etwas schwächen, sie haben aber keinen Einfluß auf den Sättigungsgrad des Eisens. Die positiven Wechsel üben sogar einen gegenteiligen Einfluß aus; die magnetische Sättigung würde - wenn das überhaupt noch möglich ist - durch sie erhöht werden. Eine solche durch Gleichstrom „vormagnetisierte“ Drosselspule hat gegenüber den Sprechwechselströmen nur eine sehr geringe Drosselwirkung, weil die Induktivität L der Spule recht klein wird. Sie wird fast gleich der Induktivität einer Spule ohne Eisenkreis. Wir müssen daher dafür sorgen, daß wir außerhalb der magnetischen Sättigung bleiben. Ferner müssen die Hysterisisverluste so klein wie möglich gehalten werden. Beides geschieht dadurch, daß wir den magnetischen Widerstand R_m erhöhen.

Wir unterbrechen den Eisenkreis: er erhält einen Luftspalt. Es sinkt hierbei die Induktivität der Drosselspule bedeutend.

Wird die magnetische Leitfähigkeit durch einen Luftspalt im Eisenkreis verringert, so wird L entsprechend kleiner. Das stört uns aber nicht, weil der induktive Blindwiderstand ωL der Spule trotz des nicht völlig geschlossenen Eisenkreises infolge der Höhe der Sprechfrequenzen immerhin groß genug ist, um eine genügende Drosselwirkung hervorzurufen. $R_b = \omega L$ ist zwar für die niedrigste übertragene Sprach-

frequenz (300 Hz) zwar nur $\frac{1}{10}$ von R_b bei 3000 Hz, aber immer noch groß genug,

um eine ausreichende Drosselwirkung auch bei sehr schwachen Sprechwechselströmen hervorzurufen.

(30) Das Verhalten eines Transformators bei Leerlauf und Belastung

Auch diese Ziffer lehnt sich an den Band IIa an, der den Transformator eingehend behandelt.

Es wird vielen der Leser aufgefallen sein, daß ein Klingeltransformator ständig am Starkstromnetz angeschlossen ist, ohne daß der Elektrizitätszähler anspricht und damit anzeigt, daß elektrische Energie entnommen wird.

Den Aufbau und die Wirkungsweise eines Transformators brauchen wir hier nicht zu wiederholen. Was uns lediglich interessiert, ist die Frage, warum ein Transformator bei Leerlauf keinen oder nur einen verhältnismäßig geringen Strom aufnimmt. Bevor wir mit den Erläuterungen beginnen, wollen wir durch einen Versuch die oben aufgestellte Behauptung beweisen. Mittels eines U-förmigen Eisenkernes mit Joeh, einer Primärspule mit 1200 Windungen und einer Sekundärspule mit 300 Windungen bauen wir uns einen Transformator auf. Die Primärspule schließen wir über einen Wechselstrommesser (Meßbereich 0 - 1 A) an unser Wechselstromnetz

von 220 V Spannung. Die Sekundärspule verbinden wir über einen Schalter Sch mit einem Schiebewiderstand von 10Ω Gesamtwiderstand. Die Anordnung zeigt Abbildung 58.

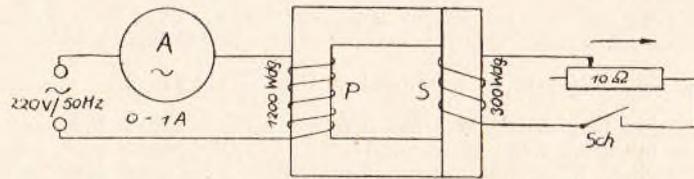


Abb. 58

Den Schalter im Sekundärstromkreis lassen wir zunächst offen und beobachten den Strommesser im Primärstromkreis.

Wir stellen fest, daß der Zeiger nicht ausschlägt.*)

Jetzt stellen wir den Schieber des Schiebewiderstandes so ein, daß der Gesamtwiderstand 10Ω beträgt und schließen den Schalter Sch; der Zeiger des Meßinstrumentes schlägt aus und zeigt uns damit an, daß durch die Primärspule ein Strom (I_{ges}) fließt. Nun verringern wir den Widerstand durch Betätigen des Schiebers. Wir sehen, daß der Zeiger des Meßinstrumentes um so mehr ausschlägt, je mehr wir den Widerstand verringern. Schalten wir den Widerstand völlig aus, indem wir den Schieber bis zum Anschlag bewegen (in Abb. 58 also ganz nach rechts), so zeigt uns der Zeiger des Meßinstrumentes im Primärstromkreis einen Höchstwert an. Im Sekundärkreis ist dann nur der Widerstand der Sekundärwicklung wirksam.

Wir haben an Hand dieses Versuches gesehen, daß ein Transformator seine primäre Stromaufnahme selbständig, je nach Größe der sekundären Belastung, regelt.

Wie ist dieses Verhalten des Transformators zu verstehen?

Die Primärspule eines nicht belasteten Transformators, also eines Transformators, dessen Sekundärklemmen **offen** sind, wirkt gegenüber dem Primärstrom als Drossel. Die Sekundärspule übt bei offenen Klemmen gar keinen Einfluß auf die Primärspule aus. Es ist so, als ob sie gar nicht vorhanden ist. Eine ideale Drossel, also eine **reine** Induktivität, nimmt nur Blindleistung auf.

Da aber zur Erzeugung der Gegen-EMK bei einer Induktivität oder der sekundären EMK bei einem Transformator eine Kraftflußänderung erforderlich ist, kann im Idealfalle diese Kraftflußänderung nur durch die aufgenommene Blindleistung, der wir einen Blindstrom I_b zusprechen, hervorgerufen worden sein. Zur Überwindung der Eisenverluste und infolge des Widerstandes der Primärwicklung nimmt ein normaler Transformator auch Wirkleistung auf, die wir aber bei unseren Betrachtungen nicht berücksichtigen wollen. Den Kraftfluß, der durch den Blindstrom entsteht, nennt man meistens Φ_μ (sprich Phi My) oder Φ_0 (Phi Null). Φ_μ erzeugt also die sekundäre EMK E_s , deren Höhe von dem Übersetzungsverhältnis u des Transformators abhängig ist. Diese Sekundär-EMK hat, wie wir wissen, entgegengesetzte Richtung zur Primärspannung U_p , ist also gegenüber dieser um 180° verschoben. Abbildung 59 zeigt uns diesen Vorgang. Hier sind die Richtungen von U_p und E_s durch Pfeile dargestellt.

Schalten wir an die Sekundärklemmen einen Verbraucher (in Abb. 60 ein Widerstand R_a), so fließt durch die Sekundärwicklung und den Verbraucher ein Strom I_s . Dieser Strom I_s verursacht in Verbindung mit den Windungen der Sekundärwicklung einen Kraftfluß, der sich auf Φ_μ auswirkt. Der Wert von Φ_μ (gestrichelte Linie

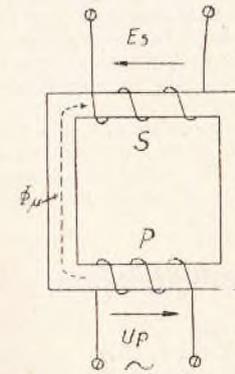


Abb. 59

in Abb. 60) darf sich jedoch **nicht** ändern, weil sonst die in Band IIa dargelegten und durch Versuche bewiesenen Transformatorgesetze durchbrochen werden. Es muß daher die kraftflußbildende Wirkung der Sekundär-Amperewindungen $I \times w$

dadurch ausgeglichen werden, daß der Transformator primärseitig einen entsprechenden Strom aufnimmt. Die durch den Primärstrom in der Primärwicklung induzierte Gegen-EMK ($-E$) gemäß Band IIa muß der aufgedrückten Primärspannung U_p stets das Gleichgewicht halten, also $U_p = -E$. Nur dann bleibt Φ_μ konstant.

Ein Transformator regelt seine Stromaufnahme selbständig in Abhängigkeit von der sekundären Belastung.

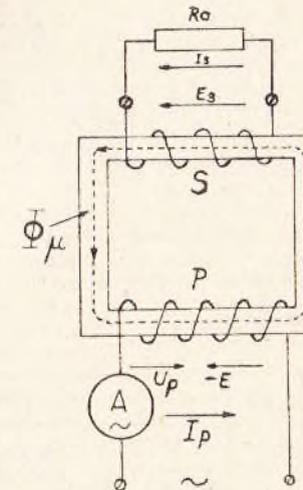


Abb. 60

*) Anm.: Bei einem empfindlichen Instrument würden wir allerdings einen geringen Strom (Blindstrom $I_b = I_{ges}$) messen.

Diese oberflächlich geschilderten Vorgänge sind recht verwickelt. Einen tieferen Einblick in die Wirkungsweise eines Transformators erhält man nur durch die sog. „Vektorendarstellung“, die wir an dieser Stelle nicht bringen können.

Bei einem Transformator ist noch der innere Widerstand der Sekundärspule zu berücksichtigen, der durch die Wicklungslänge und den Wicklungsquerschnitt bestimmt wird. Bei Belastung entsteht in der Sekundärwicklung ein innerer Spannungsverlust $I \times R_i$ und eine sekundäre Klemmenspannung U_s gem. dem erweiterten Ohmschen Gesetz (Band Ia, Ziffer 26). Die Sekundärspule eines Transformators ist also für uns als ein Generator zu betrachten, bei dem eine EMK an den **offenen** Klemmen herrscht, sobald eine Primärspannung angelegt wird. Bei Belastung tritt über dem inneren Widerstand R_i ein innerer Spannungsverlust $I \times R_i$ auf, der – wie bei einem Element – um so größer wird, je stärker der Strom ist, der die Sekundärwicklung durchfließt. $E_s - (I \times R_i)$ ergibt die sekundäre Klemmenspannung U_s .

(31) Elektrische Filter und Weichen

In der modernen Fernmeldetechnik, wie z. B. in Verstärkerschaltungen, in der Trägerfrequenztechnik, in der Wechselstromtelegraphie und dgl., sind bestimmte Schaltungen von Ohmschem Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C in Gebrauch, die man **elektrische Filter** nennt. Sie haben die Aufgabe – wie man schon aus dem Namen ersieht – bestimmte Frequenzen oder Frequenzbänder zu „filtern“, d. h. in einer bestimmten Richtung durchzulassen. Frequenzen, die höher oder tiefer als die „gefilterten“ liegen, können entweder direkt zum Generator zurückgeleitet oder einem anderen Verbraucher zugeführt werden. Im letzteren Falle spricht man von „elektrischen Weichen“.

Am einfachsten wird uns diese Einleitung am Beispiel der Drahtfunkteilnehmerweiche klar, die im Band VIII, Abb. 36 dargestellt ist. Vom Drahtfunk wissen wir, daß er hochfrequenter Natur ist und seine Frequenzen im allgemeinen um 260 kHz liegen. Wir wissen ferner, daß wir diese Drahtfunkfrequenzen gemeinsam mit unseren Sprachfrequenzen auf die TIn-Anschlußleitung geben und sie beim Teilnehmer trennen. Dem hochfrequenten Drahtfunk wird der Rückweg zum Drahtfunkverstärkeramt über die Apparateile des Fernsprechapparates versperrt: er wird zum Rundfunkempfänger geleitet. Die niederfrequenten Sprechwechselströme unserer Fernsprechverbindungen dürfen nicht zum Rundfunkempfänger gelangen; sie müssen über den Fernsprechapparat des Teilnehmers fließen.

Diese Trennung zweier auf einer Leitung fließenden Wechselströme verschiedener Frequenzen geschieht durch elektrische Filter, die zu einer „Weiche“ zusammengefaßt werden können.

Wir unterscheiden dem Aufbau und der Wirkungsweise nach zwischen „**Hochpaßfiltern**“, die die hohen Frequenzen „passieren“ lassen, „**Tiefpaßfiltern**“, die die tiefen Frequenzen „passieren“ lassen, und sogenannten „**Bandfiltern**“, die die Aufgabe haben, nur ein bestimmtes Frequenzband zu übertragen.

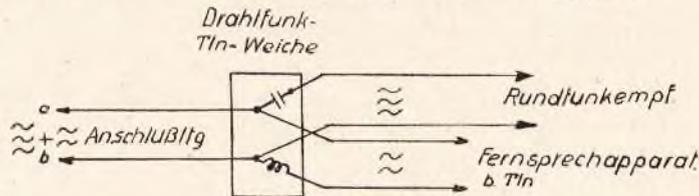


Abb. 61

Die schematische Darstellung einer elektrischen Weiche, wie sie bei der Drahtfunkteilnehmerweiche besteht, zeigt Abb. 61.

Wir erkennen aus ihr, daß über die TIn-Anschlußleitung sowohl Hochfrequenz (dargestellt durch **drei** Wechselstromzeichen übereinander) als auch Sprachfrequenzen (dargestellt durch **zwei** Wechselstromzeichen übereinander) übertragen werden, und daß in der Drahtfunkteilnehmerweiche die Hochfrequenzen dem Rundfunkempfänger, die Sprachfrequenzen dem Fernsprechapparat zugeleitet werden. Diese Trennung geschieht, wie bereits gesagt, mittels elektrischer Filter.

(32) Tiefpaßfilter (TP)

Die grundsätzliche Schaltung eines Tiefpaßfilters zeigt Abb. 62.

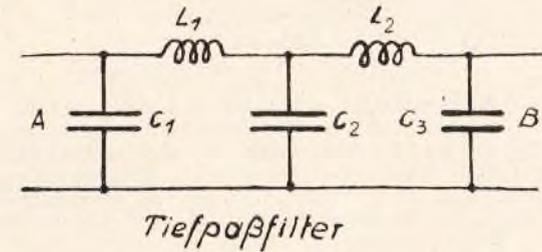


Abb. 62

Wir erkennen zwei Induktivitäten L_1 und L_2 , die – hintereinandergeschaltet – längs der Leitung liegen und demzufolge **Längsinduktivitäten** genannt werden. Quer zur Leitung liegen drei Kapazitäten C_1 bis C_3 ; sie werden wegen ihrer Lage zur Leitung **Querkapazitäten** genannt. Die Längsinduktivitäten sind so bemessen, daß ihr gemeinsamer Blindwiderstand $\omega L_1 + \omega L_2$ (von dem eigenen Ohmschen Widerstand wollen wir absehen) so groß ist, daß er ab einer bestimmten Frequenz, der sogenannten „Grenzfrequenz“ nach oben als Drossel wirkt, und zwar um so mehr, je weiter sich die zu sperrenden Frequenzen in ihrer Höhe von der Grenzfrequenz nach oben entfernen. Die Frequenzen **unterhalb** der Grenzfrequenz fließen über die Längsinduktivitäten (Übertragungsrichtung von A nach B) zu der Stelle, zu der sie gelangen sollen. Die Querkapazitäten müssen einen geringen

Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ gegenüber den Frequenzen **oberhalb**, aber einen großen Blindwiderstand gegenüber den Frequenzen **unterhalb** der Grenzfrequenz haben. Wäre dem nicht so, dann würden die Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz nicht über die Induktivitäten, d. h. in der Übertragungsrichtung von A nach B fließen, sondern zum Teil den ihnen bequemeren Weg über die Querkapazitäten nehmen.

Die Anordnung Abb. 62 läßt also – bezogen auf die Grenzfrequenz – die **tiefere** Frequenzen „passieren“; die höheren werden gesperrt.

Ein Tiefpaßfilter kann durch Wahl geeigneter Größen für L und C die verschiedensten Arten der Frequenzbegrenzung nach oben erzielen. Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz werden durchgelassen.

Wegen der Längsinduktivitäten wird ein Tiefpaßfilter auch **Drosselkette** genannt.

(33) Hochpaßfilter (HP)

Das Gegenteil eines Tiefpaßfilters stellt das **Hochpaßfilter** (HP) dar, das in Abb. 63 schematisch dargestellt ist.

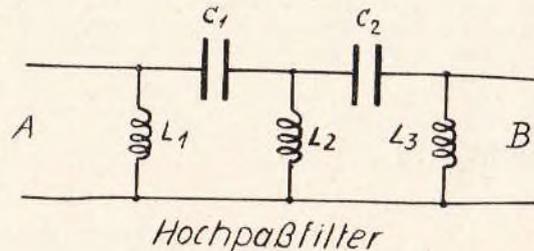


Abb. 63

Wir sehen hier zwei **Kapazitäten** C_1 und C_2 in der Leitung und drei Induktivitäten (L_1 bis L_3) parallel zu den Leitungen. Wir haben es also hier — im Gegensatz zum Tiefpaßfilter Abb. 62 — mit **Längskapazitäten** und **Querinduktivitäten** zu tun. Die Wirkungsweise muß daher gegenüber einem Tiefpaßfilter umgekehrt sein: in der Übertragungsrichtung (in Abb. 63 von A nach B) werden bei geeigneter Bemessung von C_1 und C_2 nur die **hohen** Frequenzen durchgelassen, weil für diese der

kapazitive Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ verhältnismäßig niedrig ist. Die Grenzfrequenz wird hier in erster Linie von der Größe der Gesamtkapazität $C_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ (s. Band Ib,

Ziffer 23) bestimmt. L_1 bis L_3 sind so bemessen, daß für die Frequenzen **unterhalb** der Grenzfrequenz ein bequemer Rückweg zur Spannungsquelle, u. U. über einen Verbraucher, besteht. Für Frequenzen **oberhalb** der Grenzfrequenz wirken L_1 bis L_3 mit zunehmendem Abstand von der Grenzfrequenz als Drossel.

Ein Hochpaßfilter kann durch Wahl geeigneter Größen für C und L die verschiedensten Arten der Frequenzbegrenzung nach unten erzielen. Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz werden durchgelassen.

Wegen der Längskapazitäten wird ein Hochpaßfilter auch **Kondensatorkette** genannt.

(34) Hoch- und Tiefpaßfilter in der Drahtfunkteilnehmerweiche 37

Abb. 64 zeigt uns die Schaltung der Hoch- und Tiefpaßfilter in der Drahtfunkteilnehmerweiche 37. Diese Abb. stellt eine Erweiterung der Abb. 61 dar, in der die Filter nur angedeutet sind. Da nach dem Vorhergesagten die Zeichnung für sich spricht, wollen wir uns eine eingehende Erläuterung ersparen. Die Hochfrequenz des Drahtfunkes wird über den Hochpaß HP zum Empfänger geleitet; der Tiefpaß TP sperrt diese hohen Frequenzen. Für die Sprechwechselströme gilt das Gegenteil.

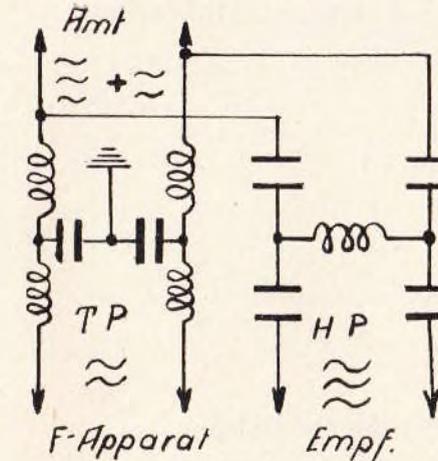


Abb. 64

(35) Bandfilter, Bandsperren

Bandfilter haben die Aufgabe, ein bestimmtes Frequenzband, z. B. von 6000 bis 9000 Hz, in der Übertragungsrichtung „durchzulassen“ und alle Frequenzen ober- und unterhalb dieses Frequenzbandes zu sperren. Hierfür gibt es verschiedene Schaltungsmöglichkeiten, die wir in diesem Rahmen nicht besprechen wollen. Solche Bandfilter tragen oft die Merkmale einer Drosselkette und einer Kondensatorkette in sich vereinigt und beruhen häufig auf der Wirkung der Parallelresonanz und der Reihenresonanz. So sorgt die Parallelschaltung von L und C zwischen den Leitungen Abb. 65 dafür, daß die Frequenzen unter- und oberhalb des zu übertragenden Frequenzbandes auf Grund des für sie geringen Widerstandes abgeleitet werden und das zu übertragende Frequenzband über die Reihenschaltung von L und C durchgelassen wird.

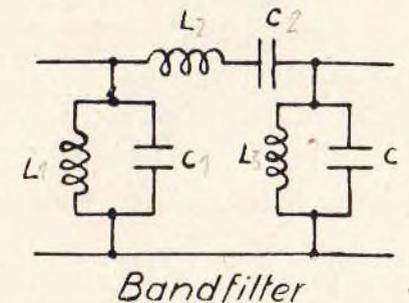


Abb. 65

Das Gegenteil eines Bandfilters ist die **Bandsperre**. Sie **unterdrückt** ein bestimmtes Frequenzband und überträgt alle Frequenzen unter- oder oberhalb.

(36) Siebketten bei Netzanschlußgeräten

Die Siebketten bei Netzanschlußgeräten sind ähnlich aufgebaut wie das Tiefpaßfilter Abb. 62. Die Siebkette hat die Aufgabe, die Welligkeit des durch Gleichrichter gleichgerichteten Wechselstromes [vgl. Band XI*), Gleichrichterschaltungen] zu unterdrücken. Es fließt damit ein **völlig reiner** Gleichstrom über die Mikrophone der Nebenstellenanlagen oder - bei Rundfunkempfängern - durch die Röhren.

Da die Frequenz der Welligkeit - je nach Schaltung der Gleichrichter - 50 oder 100 Hz beträgt, müssen die Induktivitäten und Kapazitäten einer solchen Siebkette entsprechend groß bemessen sein. Wir fassen einen welligen Gleichstrom als einen reinen Gleichstrom mit einem ihn überlagernden Wechselstrom von der Frequenz 50 oder 100 Hz auf. Je größer die Querkapazitäten sind, um so sicherer wird der Wechselstromanteil zur Spannungsquelle (Gleichrichter) zurückgeleitet; es verbleibt dann für unsere Zwecke ein reiner Gleichstrom.

Näheres hierüber wäre im Band XI unter „Netzanschlußgeräte“ nachzulesen.

(37) Der Dreiphasenwechselstrom

Zum Schluß dieser Ausführungen wollen wir uns kurz mit dem Dreiphasenwechselstrom, auch Drehstrom genannt, beschäftigen. Wenn auch die Behandlung des Dreiphasenwechselstromes nicht unbedingt in das Gebiet „Elektrotechnik für Fernmeldetechniker“ fällt, so ist es doch von Vorteil, wenn der Fernmeldetechniker wenigstens das Grundsätzliche über den Dreiphasenwechselstrom kennt.

Um das Wesen und die Bedeutung des Dreiphasenwechselstromes zu verstehen, machen wir folgenden Versuch (Abb. 66):

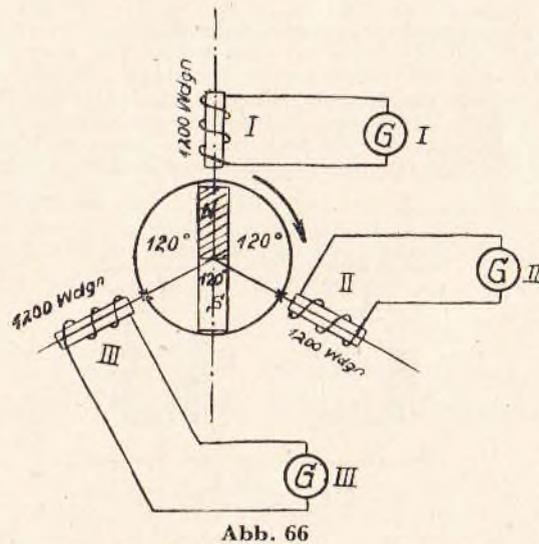


Abb. 66

Wir stellen drei Spulen zu je 1200 Windungen, die mit einem kurzen Eisenkern ausgestattet sind, so auf, daß die Spulenlängsachsen gegeneinander einen Winkel von 120° bilden. Dort, wo die (gedachten) Spulenachsen sich schneiden, ist der Drehpunkt eines Stabmagneten. Anfänge und Enden jeder Spule verbinden wir über ein Galvanometer miteinander.

Drehen wir den Stabmagneten gemäß Abb. 66 nach rechts, so durchsetzt sein Kraftfluß am meisten die Spule, deren Längsachse mit der magnetischen Achse des Dauermagneten zusammenfällt (in Abb. 66 die Spule I). Das Galvanometer G I wird für diesen Augenblick den größten Ausschlag zeigen. Drehen wir den Stabmagneten weiter nach rechts, so nimmt die Stärke des die Spule I durchsetzenden Kraftflusses ab: der Zeiger von G I geht zurück. Nun kommt Spule II in den wirksamen Kraftflußbereich des Stabmagneten. In dem gleichen Maße, wie der Zeiger von G I zurückgeht, schlägt der Zeiger von G II aus.

Aber auch der Zeiger von G III schlägt aus, jedoch in entgegengesetzter Richtung wie G II, weil sich der Spule III der **Südpol** des Dauermagneten nähert. Dasselbe zeigt G I an, wenn sich der **Nordpol** des Dauermagneten der Spule III nähert usw.

Infolge der gleichen Änderungsgeschwindigkeit des Kraftflusses und der gleichen Windungszahl aller drei Spulen werden in den Spulen **nacheinander** gleiche Spannungshöchstwerte und auch Augenblickswerte erzeugt. Damit fließen drei gleich starke Ströme über G I, G II und G III als gleiche Außenwiderstände, aber jeweils zu einem anderen, im Verhältnis jedoch gleichbleibendem Zeitpunkt.

Nehmen wir an, daß in Stellung des Stabmagneten Abb. 66 der Strom $I_1 = +1$ A betrage. I_2 und I_3 haben dann eine Stärke von je $-0,5$ A. Bei $1/3$ Umdrehung des Stabmagneten (entsprechend 120° oder $\frac{2\pi}{3}$) betragen $I_2 = +1$ A, I_3 und I_1 je $-0,5$ A. Bei einer weiteren Drittelumdrehung (entsprechend 240° oder $\frac{4\pi}{3}$) fließt durch G III der Höchststrom von $+1$ A, durch G I und G II je $-0,5$ A.

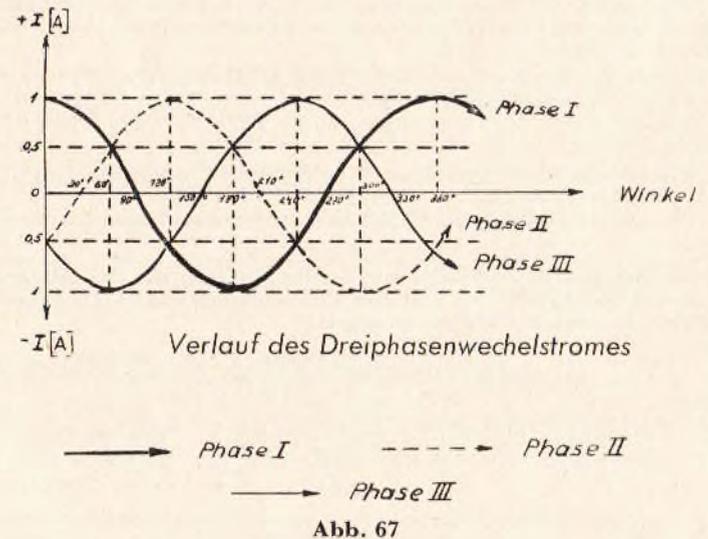


Abb. 67

*) Anm.: Band XI befindet sich in Vorbereitung, Inhaltsangaben siehe Anzeigen in „Beruf und Bildung“.

Wir kommen durch den Versuch Abb. 66 zu dem Ergebnis, daß bei je $\frac{1}{3}$ Umdrehung des Stabmagneten (entsprechend 120°) in den Stromkreisen I, II und III die gleichen Höchstwerte der Spannungen und – bei gleicher Belastung – auch die des Stromes auftreten, jedoch um 120° gegeneinander verschoben.

Das gleiche gilt selbstverständlich auch für jeden Augenblickswert. Wir haben es hierbei aber nicht mit einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gemäß Ziffer 13 zu tun, sondern um **drei völlig voneinander getrennte Ströme**, die in ihrem zeitlichen Ablauf (ihrer Phase) um 120° gegeneinander verschoben sind. Im Stromkreis I fließt der Strom I_1 , der bei 0° den Höchstwert von $+1\text{ A}$ haben möge. Diesen Strom zeichnen wir uns gemäß Abb. 67 als dicke Linie auf und nennen ihn „Phase I“.

Bei 0° hat I_1 seinen positiven Höchstwert $+1\text{ A}$, bei 90° den Wert 0, bei 180° seinen negativen Höchstwert -1 A , bei 270° den Wert 0 und bei 360° wiederum seinen positiven Höchstwert.

Im Stromkreis II fließt der Strom I_2 von gleicher Stärke, aber gegen I_1 um 120° verschoben (gestrichelte Linie). Wir nennen ihn „Phase II“. Bei 30° hat dieser Strom den Wert 0 A, bei 120° seinen positiven Höchstwert $+1\text{ A}$, bei $120^\circ + 90^\circ = 210^\circ$ wiederum den Wert 0 und erreicht bei $210^\circ + 90^\circ = 300^\circ$ seinen negativen Höchstwert -1 A .

Im Stromkreis III fließt der Strom I_3 , der gegenüber I_2 wiederum um 120° verschoben ist (dünne Linie). Wir nennen ihn „Phase III“. Bei 60° hat I_3 seinen negativen Höchstwert (-1 A), bei $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ geht die Stromkurve durch die Nulllinie; bei $150^\circ + 90^\circ = 240^\circ$ erreicht I_3 seinen positiven Höchstwert ($+1\text{ A}$) und bei $240^\circ + 90^\circ = 330^\circ$ wiederum den Wert 0. **Alle drei Ströme sind gegeneinander in ihrem Ablauf um 120° verschoben.** Das gleiche gilt selbstverständlich auch für die Spannungen*).

Wir betrachten jetzt die Abb. 67 von einem anderen Gesichtspunkt, nämlich von der Höhe der Amplituden bei bestimmten Winkelgrößen und fangen bei 60° an. Hier erreichen Phase I (dicke Linie) und Phase II (gestrichelte Linie) je den Wert von $+0,5\text{ A}$. Diese beiden Werte zusammengezählt ergeben $+1\text{ A}$. Die Phase III (dünne Linie) hat bei 60° ihren negativen Höchstwert, nämlich -1 A . Zählen wir die positiven und negativen Werte zusammen, so ergibt sich der Wert 0 ($+0,5\text{ A} + 0,5\text{ A} - 1\text{ A} = 0$).

Nun betrachten wir die Kurven bei 90° . Phase I hat den Wert 0, Phase II einen bestimmten, positiven Höchstwert, nämlich etwa $0,9\text{ A}$. Phase III hat einen gleich großen negativen Wert. Auch hier ergibt sich: 0 (Phase I) $+ 0,9$ (Phase II) $- 0,9$ (Phase III) = 0.

Bei 180° haben wir folgendes Bild: Phase I: negativer Höchstwert (-1 A), Phase II: $+0,5\text{ A}$, Phase III: ebenfalls $+0,5\text{ A}$. Summe: $-1\text{ A} + 0,5\text{ A} + 0,5\text{ A} = 0$. Das hier an drei Beispielen Gezeigte läßt sich in einem wichtigen Satz zusammenfassen:

Bei einem Dreiphasenwechselstrom ergibt die Summe der Augenblickswerte aller drei Phasen (bei gleicher Phasenbelastung) stets den Wert 0. Das gleiche gilt auch für die Spannungen.

Diese Erkenntnis hat dem Dreiphasenwechselstrom seine besondere Bedeutung gegeben: wir können nämlich die Rückleitungen zum Generator Abb. 66 und 68a weglassen und schalten die drei Wicklungen gemäß Abb. 68 b zusammen.

In diesen Abbildungen sind lediglich die Feldspulen des Dreiphasenwechselstromgenerators eingezeichnet, die um 120° gegeneinander versetzt sind. Die Anfänge

*) Anm.: Daß innerhalb der einzelnen Phasen auch eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gemäß Ziffer 13 auftreten kann, sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

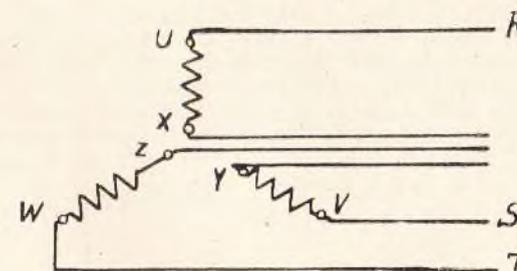


Abb. 68a

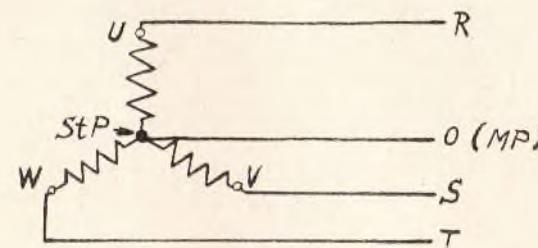


Abb. 68b

der Spulen bezeichnen wir (im Uhrzeigersinne) mit U, V und W; die Enden mit X, Y und Z. Die herausgeführten Leitungen heißen R, S und T. Aus Abb. 68a erkennen wir schon bildlich, daß die Rückleitungen X, Y, Z (wenn wir R, S und T als Hinleitungen zum Verbraucher betrachten) geradezu nach einer Vereinigung drängen. Wir verbinden also die Enden X, Y und Z der Spulen miteinander und führen von diesem Punkt, dem **Sternpunkt (StP)**, nur einen Rückleiter heraus. Dieser Rückleiter heißt **Nulleiter** oder **Mittelpunktleiter (Mp)**. Einen solchen Vorgang nennt man **Verkettung**.

Wenn alle drei Phasenströme gleich stark sind, was wir in Abb. 67 durch gleiche Amplitudenhöhe dargestellt haben, so brauchen wir überhaupt keinen Nulleiter, weil dann die Summe aller Augenblickswerte gleich Null ist.

Da in der Praxis jedoch das anzustrebende Ziel, nämlich gleiche Phasenbelastung, nicht erreichbar ist, benutzt man den Nulleiter oder die Erde zur Rückführung der Ausgleichströme. Dieser Nulleiter hat im Verhältnis zu den Phasenleitern R, S und T einen nur geringen Querschnitt, weil die Ausgleichströme im Verhältnis zu den Phasenströmen klein sind.

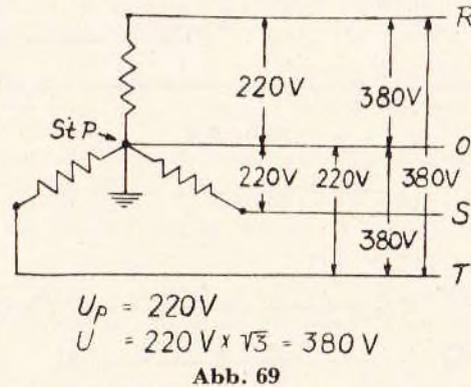
(38) Sternschaltung und Sternspannungen

Die Zusammenführung der Spulenden an einen gemeinsamen Punkt, den Sternpunkt StP in Abb. 68b, ergibt die Sternschaltung und damit eine von zwei möglichen Verkettungen der drei Phasenspannungen und Phasenströme. Die zweite Möglichkeit ist die Dreieckschaltung (siehe Ziffer 39).

Die Verkettung in Sternschaltung hat zur Folge, daß wir **zwei** Spannungen messen können, nämlich

1. die Spannung, die an den Enden der Spule herrscht, d. h. R (bzw. U) gegen StP, S (bzw. V) gegen StP und T (bzw. W) gegen StP. Diese Spannungen nennt man „Phasenspannungen“ (U_p) oder „Sternspannungen“.
2. Die Spannung, die zwischen den Anfängen **zweier** Spulen bzw. den Phasenleitern herrscht, d. h. R gegen S, R gegen T, S gegen T. Diese Spannungen nennt man „verkettete Spannungen“ oder „Dreieckspannungen“.

Hierzu betrachten wir Abbildung 69.

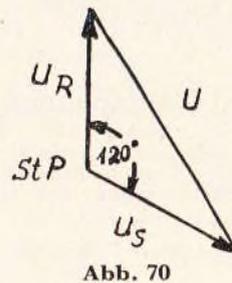


Wir erkennen hier eine Sternschaltung mit einem geerdeten Sternpunkt und einem herausgeführten Nulleiter.

Zwischen R und 0, S und 0 sowie T und 0 müssen zwangsläufig die Spannungen herrschen, die in den Wicklungen I, II und III induziert werden (vgl. hierzu Abb. 66 und 68a). Wir nehmen an, daß in jeder Wicklung nach den Induktionsgesetzen eine Spannung von 220 V induziert wird. Wir messen in allen drei Fällen eine Phasenspannung U_p von 220 V. Die verkettete Spannung U muß höher als die Phasenspannung sein, weil Wicklung I und II, II und III sowie III und I gewissermaßen hintereinandergeschaltet sind. Die in jeder Wicklung induzierten Spannungen addieren sich. Diese Summe beträgt aber nicht das **Doppelte** einer Phasenspannung, sondern infolge der Anordnung von 120° zueinander nur das $\sqrt{3}$ fache. $\sqrt{3}$ ist gleich 1,732; die verkettete Spannung beträgt in unserem Beispiel:

$$U = 220 \times \sqrt{3} = 220 \times 1,732 = 380 V.$$

Abbildung 70 zeigt uns die zeichnerische Darstellung.

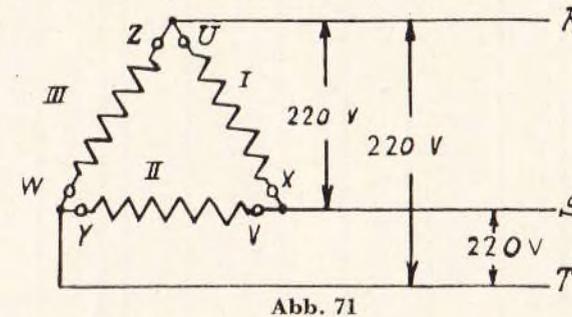


Vom Sternpunkt StP aus tragen wir nach oben in einem bestimmten Längenmaß, z. B. 2,2 cm, die Phasenspannung $U_p = U_R$ von 220 V auf. In einem Winkel von 120° zu U_R tragen wir die Phasenspannung $U_p = U_S$ (ebenfalls 2,2 cm, entsprechend 220 V) an. Die Verbindungslinie der Endpunkte ergibt die verkettete Spannung U . Da 1 cm 100 V entspricht, können wir den Wert von U bestimmen, indem wir die Länge der Strecke messen. Wir stellen fest, daß die Verbindungslinie 3,8 cm lang ist, was einer Spannung von $3,8 \times 100 = 380 V$ entspricht.

Der Gesamtstrom in Sternschaltung ist gleich der Stärke eines Spulenstromes; er kann über diesen Wert nicht hinauswachsen.

(39) Dreieckschaltung

Die Dreieckschaltung unterscheidet sich von der Sternschaltung dadurch, daß das Ende der ersten Wicklung mit dem Anfang der zweiten, das Ende der zweiten mit dem Anfang der dritten und das Ende der dritten mit dem Anfang der ersten Wicklung verbunden ist. Wir erhalten bei derartigen Schaltung ein Dreieck, an dessen Eckpunkten die Ströme abgenommen werden (Abb. 71).



Die Spannungen zwischen R und S, S und T sowie R und T sind „verkettete“ oder „Dreieckspannungen“ und betragen nicht mehr als die Phasenspannung U_p in Sternschaltung, d. h. in unserem Beispiel 220 V. Die **Ströme** sind aber bei einer derartigen Verkettung um das $\sqrt{3}$ fache stärker als der Spulenstrom. Daher werden Drehstromelektromotoren bei Vollast im allgemeinen in Dreieckschaltung betrieben.

Tabelle der Sinus- und Tangenswerte für Winkel zwischen 0° und 45°

Sinus			Tangens		
Grad	0°-45°		Grad	0°-45°	
0	0,0000	90	0	0,0000	
1	0,0175	89	1	0,0175	
2	0,0349	88	2	0,0349	
3	0,0523	87	3	0,0524	
4	0,0698	86	4	0,0699	
5	0,0872	85	5	0,0875	
6	0,1045	84	6	0,1051	
7	0,1219	83	7	0,1223	
8	0,1392	82	8	0,1405	
9	0,1564	81	9	0,1584	
10	0,1736	80	10	0,1763	
11	0,1908	79	11	0,1944	
12	0,2079	78	12	0,2126	
13	0,2250	77	13	0,2309	
14	0,2419	76	14	0,2493	
15	0,2588	75	15	0,2679	
16	0,2756	74	16	0,2867	
17	0,2924	73	17	0,3057	
18	0,3090	72	18	0,3249	
19	0,3256	71	19	0,3443	
20	0,3420	70	20	0,3640	
21	0,3584	69	21	0,3839	
22	0,3746	68	22	0,4040	
23	0,3907	67	23	0,4245	
24	0,4067	66	24	0,4452	
25	0,4226	65	25	0,4663	
26	0,4384	64	26	0,4877	
27	0,4540	63	27	0,5095	
28	0,4695	62	28	0,5317	
29	0,4848	61	29	0,5543	
30	0,5000	60	30	0,5774	
31	0,5150	59	31	0,6009	
32	0,5299	58	32	0,6249	
33	0,5446	57	33	0,6494	
34	0,5592	56	34	0,6745	
35	0,5736	55	35	0,7002	
36	0,5878	54	36	0,7265	
37	0,6018	53	37	0,7536	
38	0,6157	52	38	0,7813	
39	0,6293	51	39	0,8098	
40	0,6428	50	40	0,8391	
41	0,6561	49	41	0,8693	
42	0,6691	48	42	0,9004	
43	0,6820	47	43	0,9325	
44	0,6947	46	44	0,9657	
45	0,7071	45	45	1,0000	

Cosinuswerte für Winkel zwischen 45° und 90°

Tabelle der Sinus- und Tangenswerte für Winkel zwischen 45° und 90°

Sinus			Tangens		
Grad	45°-90°		Grad	45°-90°	
45	0,7071	45	45	1,0000	
46	0,7193	44	46	1,0355	
47	0,7314	43	47	1,0724	
48	0,7431	42	48	1,1106	
49	0,7547	41	49	1,1504	
50	0,7660	40	50	1,1918	
51	0,7771	39	51	1,2349	
52	0,7880	38	52	1,2799	
53	0,7986	37	53	1,3270	
54	0,8090	36	54	1,3764	
55	0,8192	35	55	1,4281	
56	0,8290	34	56	1,4826	
57	0,8387	33	57	1,5399	
58	0,8480	32	58	1,6003	
59	0,8572	31	59	1,6643	
60	0,8660	30	60	1,7321	
61	0,8746	29	61	1,8041	
62	0,8829	28	62	1,8807	
63	0,8910	27	63	1,9626	
64	0,8988	26	64	2,0503	
65	0,9063	25	65	2,1445	
66	0,9135	24	66	2,2460	
67	0,9205	23	67	2,3559	
68	0,9272	22	68	2,4751	
69	0,9336	21	69	2,6051	
70	0,9397	20	70	2,7475	
71	0,9455	19	71	2,9042	
72	0,9511	18	72	3,0777	
73	0,9563	17	73	3,2709	
74	0,9613	16	74	3,4874	
75	0,9659	15	75	3,7321	
76	0,9703	14	76	4,0108	
77	0,9744	13	77	4,3315	
78	0,9781	12	78	4,7046	
79	0,9816	11	79	5,1446	
80	0,9848	10	80	5,6713	
81	0,9877	9	81	6,3138	
82	0,9903	8	82	7,1154	
83	0,9925	7	83	8,1444	
84	0,9945	6	84	9,5144	
85	0,9962	5	85	11,4301	
86	0,9976	4	86	14,3007	
87	0,9986	3	87	19,0811	
88	0,9994	2	88	28,6363	
89	0,9999	1	89	57,2900	
90	1,0000	0	90	∞	

Cosinuswerte für Winkel zwischen 0° und 45°

